DÉNOMBREMENT

- *Dénombrer* un ensemble fini, c'est compter son nombre d'éléments. On s'intéresse plus ici au cardinal de l'ensemble qu'à l'ensemble lui-même. Ainsi, on notera E_n tout ensemble théorique de cardinal n, entier supérieur ou égal à 1.

- On va étudier ici les cas théoriques les plus classiques auxquels se rapportent la plupart des cas de dénombrements :

1) *Sous-ensembles de E_n*

- On note $s(E_n)$ l'ensemble des sous-ensembles de E_n. On cherche le cardinal de $s(E_n)$, que l'on notera u_n. Calculons u_1, u_2 et u_3 :

➢ Si $E_1 = \{a\}$, $s(E_1) = \{\varnothing, \{a\}\}$ donc $u_1 = 2$.

➢ Si $E_2 = \{a,b\}$, $s(E_2) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, donc $u_2 = 4$.

➢ Si $E_3 = \{a,b,c\}$, $u_3 = 8$ car :
$s(E_3) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Faire une démonstration par récurrence en considérant les ensembles $E_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ et $E_{n+1} = E_n \cup \{a_{n+1}\}$ et en montrant que $u_{n+1} = 2u_n$.

- **T1** : si E_n est un ensemble fini de cardinal n, son nombre de sous-ensembles est 2^n.

E1 : Déterminer le nombre de façons de partager un ensemble à n éléments en deux sous-ensembles disjoints non vides.

E2* : On définit une relation $\Re$ entre les éléments de $E = \{a,b,c\}$ par un dessin, noté *graphe*, liant ou non les éléments de E. (Un exemple de graphe : a vers b, b vers a, c vers a et c vers c)

a) Montrer qu'on peut ainsi définir 512 graphes.

b) Une relation est dite *réflexive* si et seulement si, pour tout élément x de E, $x \Re x$. Montrer qu'il y a 64 graphes correspondant à une relation réflexive.

c) Une relation est dite *symétrique* si et seulement si, pour tout couple $(x\,;y)$ de E^2, $(x \Re y) \Rightarrow (y \Re x)$.
Montrer qu'il existe 64 graphes correspondant à une relation symétrique.

d) Déterminer le nombre de graphes correspondant à une relation à la fois réflexive et symétrique.

2) *Produit cartésien de deux ensembles :*

a) D1 : Soit A et B deux ensembles. On appelle ***produit cartésien*** de A et B, et on note $A \times B$, l'ensemble des couples (a,b) tels que a appartient à A et b appartient à B.

C'est-à-dire : $A \times B = \{(a,b) \,/\, a \in A \,,\, b \in B\}$.

b) P1 (*admise*) justifiant la notation.
Si A et B sont deux ensembles finis, l'ensemble $A \times B$ est fini et

$$\boxed{\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)}$$

c) Conséquences

- Soit E_1, E_2, …, E_n, n ensembles, alors le cardinal de leur produit cartésien est égal au produit de leurs cardinaux.
- En particulier, si tous les ensembles sont égaux à E, alors on a : $\text{card}(E^n) = (\text{card}(E))^n$, où E^n symbolise $E \times ... \times E$, n fois.

3) *p-listes d'éléments de E_n*

Tirage ordonné avec remise de p objets parmi n

Ensemble des applications de E_p vers E_n

a) D2 : Soit deux entiers naturels non nuls n et p.
On appelle *p-liste* d'éléments de E_n une liste ordonnée de p éléments de E_n (distincts ou non).

- **Notation** : Grâce à la notion de produit cartésien, l'ensemble des p-listes d'éléments de E_n est noté $(E_n)^p$ et $(E_n)^p = \{(x_1, x_2, ..., x_p), x_k \in E_n, k \in [1\,;n]\}$
- **Exemples** avec $E_3 = \{a,b,c\}$

➢ (c,a), (a,c) et (b,b) sont des 2-listes d'éléments de E_3. On les appelle des couples.

➢ (a,c,b), (c,a,b), (b,a,b) et (c,c,c) sont des 3-listes d'éléments de E_3, appelées des triplets…

b) Nombre de *p*-listes

- **T2 :** D'après la formule vue précédemment, le nombre de p-listes d'éléments de l'ensemble E_n est :

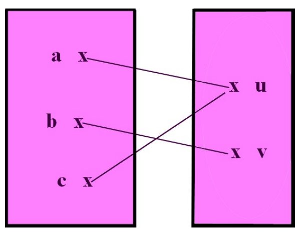
$$card\left((E_n)^p\right) = n^p$$

- **Exemple** : Le nombre de numéros de téléphone à quatre chiffres est le nombre de 4-listes d'éléments de $E_{10} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\}$.
C'est 10^4, donc dix mille. On remarquera que cela correspond bien aux numéros allant de « 0000 » à « 9999 », donc dix mille.

c) Ou encore : n^p est le nombre de façons de tirer successivement (donc tirage ordonné) avec remise p objets parmi n.

d) Autrement dit : Applications de E_p vers E_n

- Considérons l'ensemble $E_p = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ et l'ensemble E_n. On remarque que déterminer le nombre d'applications f de E_p vers E_n revient à déterminer le nombre de p-uplets $(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_p))$ que l'on peut dénombrer.
- Par exemple : Pour $p = 3$ et $n = 2$, avec $E_3 = \{a,b,c\}$ et $E_2 = \{u,v\}$, une application possible est définie par $f(a) = u$, $f(b) = v$ et $f(c) = u$, *i.e.* le triplet (u,v,u)…



- **Remarque** : Le calcul du nombre de sous-ensembles d'un ensemble (voir le paragraphe précédent) est un cas particulier du cas présent.

E3 : Une suite de dix questions est proposée à un candidat qui doit répondre par OUI ou par NON à ces questions.
Combien de réponses différentes peut-on envisager :

a) En supposant que toutes les questions reçoivent une réponse ?
b) En supposant que certaines questions peuvent être laissées sans réponse ?

E4 : Déterminer le nombre minimum d'habitants d'un village pour être sûr qu'il y ait au moins deux personnes avec les mêmes initiales.

E5 : On veut répartir 10 boules dans 3 urnes.

a) Déterminer le nombre total de répartitions possibles sachant que certaines urnes peuvent rester vides.
b) Même question, sachant qu'aucune urne ne doit être vide.

E6* : Une application, définie de l'ensemble E vers l'ensemble F, est dite <u>*surjective*</u> si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent dans l'ensemble E.

a) Déterminer le nombre d'applications surjectives de E vers F, avec card $E = n$ et card $F = 2$.
b) Idem avec card $F = 3$.

E7* : Déterminer combien il existe d'entiers positifs inférieurs à un million et uniquement composés de 1 ou (inclusif) de 2.

E8* : À tout entier strictement positif n, on associe le nombre $k(n)$, qui est le plus petit chiffre de son écriture décimale.

Calculer la somme suivante : $\sum_{n=1000}^{9999} k(n)$.

4) Permutations des éléments de E_n
Tirage successif total sans remise
Ensemble des bijections de E_n vers E_n

a) D3 : Soit un entier naturel non nul n et un ensemble E_n de cardinal n, une <u>*permutation*</u> de n éléments de E_n est un n-uplet constitué d'une et une seule fois chaque élément de E_n.

- **Exemple :** Si $E_3 = \{a,b,c\}$, une permutation des éléments de E_3 est (c,a,b), ou encore (a,c,b)…

b) Nombre de permutations de *n* éléments

- **Exemple** : Les <u>*anagrammes*</u> du mot DIX, donc les mots de trois lettres formés avec exactement les lettres D, I et X (indépendamment du sens du mot), sont : DIX, DXI, IDX, IXD, XDI et XID.
Il y en a 6.

- **Rappel** : Si n est un entier strictement positif, <u>*factoriel n*</u>, noté $n\,!$, est l'entier

$$\boxed{n\,! = n(n-1)(n-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}$$

- **T3 :** Le nombre de permutations des n éléments de l'ensemble E_n est l'entier : $n\,!$

c) Ou encore : n ! est le nombre de façons de tirer <u>successivement</u> et <u>sans remise</u> n objets parmi n.

d) Autrement dit : Bijections de E_n vers E_n

- On cherche ici le nombre de bijections de E_n vers E_n. (Il ne peut y avoir bijection d'un ensemble fini vers un ensemble fini que s'ils ont même cardinal).
Notons $E_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

- La différence avec le nombre d'applications vu précédemment est qu'ici, une fois $f(a_1)$ choisi (parmi n éléments), $f(a_2)$ ne peut être égal à $f(a_1)$ et est donc choisi parmi $n-1$ éléments. De même $f(a_3)$ ne peut être égal ni à $f(a_1)$ ni à $f(a_2)$, et est donc choisi parmi $n-2$ éléments, et ainsi de suite…

- Le nombre cherché est donc le cardinal du produit cartésien $E_n \times E_{n-1} \times \ldots \times E_2 \times E_1$ et est donc égal à :
$$n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1.$$

- Avec $n = 3$, voici l'ensemble des permutations, sous forme d'un <u>*arbre*</u>

$$\begin{array}{ccc} f(a) & f(b) & f(c) \end{array}$$
$$\left\{\begin{array}{l} a \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b \longrightarrow c \succ\!\!\succ\!\!\succ \text{cas } 1 \\ c \longrightarrow b \succ\!\!\succ\!\!\succ \text{cas } 2 \end{array}\right. \\ b \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \longrightarrow c \succ\!\!\succ\!\!\succ \text{cas } 3 \\ c \longrightarrow a \succ\!\!\succ\!\!\succ \text{cas } 4 \end{array}\right. \\ c \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \longrightarrow b \succ\!\!\succ\!\!\succ \text{cas } 5 \\ b \longrightarrow a \succ\!\!\succ\!\!\succ \text{cas } 6 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

- Il y a donc six bijections : les six fonctions f pour lesquelles le triplet $\big(f(a), f(b), f(c)\big)$ vaut l'un des six triplets suivants :
cas 1 : (a,b,c), cas 2 : (a,c,b), cas 3 : (b,a,c),
cas 4 : (b,c,a), cas 5 : (c,a,b) et cas 6 : (c,b,a)

E9 : a) Une grenouille monte un escalier de cinq marches. Elle peut progresser en sautant d'une marche à la suivante ou en sautant par-dessus une marche (de la marche n à la marche $n + 2$). Combien a-t-elle de façons distinctes d'arriver au sommet ?

b) Les joueurs Arthur et Béatrice font un tournoi.
Le premier qui gagne est celui qui a deux victoires consécutives, ou qui obtient trois victoires en tout.
Indiquer, sous forme d'un arbre, toutes les configurations du tournoi.

E10 : Déterminer le nombre de façons de ranger n personnes en « file indienne », puis en « rond », puis assis autour d'une table *(on discutera dans ce dernier cas selon qu'on tient compte ou non de la position par rapport à la table)*.

E11 : Quatre hommes et quatre femmes s'assoient autour d'une table entourée de huit chaises (*on tient compte de leurs positions par rapport à la table*).

a) Combien existe-t-il de dispositions possibles ?
b) Idem sachant que deux personnes du même sexe ne peuvent se côtoyer.
c) Idem sachant que la personne A ne doit pas être assise à côté de la personne B.

E12 : a) Combien de mots différents peut-on former en utilisant une et une seule fois chaque lettre du mot ASTRE, indépendamment du sens du mot ?

b) Même question pour le mot ASTRES, puis pour le mot ANANAS.

c) De combien de façons différentes peut-on écrire le nombre 20 comme somme des nombres 1, 1, 4, 4, 4 et 6 ? Quel rapport avec la question précédente ?

E13 : Déterminer le nombre d'applications non bijectives de E_n, ensemble de cardinal n, entier supérieur ou égal à 1.

E14* : a) Montrer que 6 ! peut s'écrire comme le produit de deux factoriels d'entiers supérieurs ou égaux à 2.

b) Il en est de même de 24 !. Trouver une formule générale.

c) Montrer que 10 ! s'écrit comme le produit de deux, et aussi de trois factoriels d'entiers supérieurs ou égaux à 2.

5) Arrangements de p éléments de E_n
Tirage successif sans remise de p objets parmi n
Ensemble des injections de E_p vers E_n

a) D4 : Soit deux entiers naturels non nuls n et $\boldsymbol{p \leq n}$. Soit un ensemble E_n (de cardinal n). Un *arrangement* de p éléments de E_n est une p-liste d'éléments de E_n, distincts deux à deux.

b) Nombre d'arrangements de *p* éléments

- **T4 :** Le nombre d'arrangements de p éléments de E_n est l'entier noté A_n^p égal à :

$$n(n-1)(n-2)............(n-p+1) = \prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$$

- **Exemple** : Dans une course avec quatre participants A, B, C et D, le nombre de résultats 1$^{\text{er}}$ / 2$^{\text{e}}$ possibles (sans possibilité d'*ex-aequo*) est : $A_4^2 = 4\times 3 = 12$, c'est-à-dire : A premier et B deuxième, ou A puis C, ou AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB et DC.
- **Remarque** : A_n^p peut aussi s'écrire $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

  De plus, on a vu que, lorsque $p = n$, on a $A_n^n = n!$

  Pour rendre cette formule cohérente, on prend la convention suivante : 0! = 1.
- La suite factorielle est ainsi définie par : $u_0 = 1$ et,

  pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = (n+1)\,u_n$.

c) Ou encore : C'est le nombre de façons de tirer successivement et sans remise de p objets parmi n.

d) Autrement dit : Injections de E_p vers E_n

- **D5** : Une fonction f de E vers F est dite *injective*, ou encore réalise une *injection* de E vers F si et seulement si deux éléments distincts de E ont toujours des images distinctes :
- Pour tout (a,b) de E^2, $(a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$
- Ou encore, par contraposée :
  Pour tout (a,b) de E^2, $(f(a) = f(b)) \Rightarrow (a = b)$
- Si $p > n$, il n'existe pas d'injections de E vers F. Ainsi $A_n^p = 0$ lorsque $p > n$.
- Si $p = n$, on retrouve la bijection, car une injection d'un ensemble fini vers lui-même est une bijection.
- Si $p < n$, la méthode de détermination est la même que précédemment.
- Notons $E = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$. Si f est une injection, il y a n choix possibles pour $f(a_1)$, puis $n-1$ choix pour $f(a_2)$, puisque $f(a_2) \neq f(a_1)$. Continuer le raisonnement. Conclure.
- Le nombre cherché est égal à A_n^p.

E15 : Dix coureurs prennent part à une course. Combien y a-t-il de podiums possibles ?

E16 : On choisit deux élèves délégués ayant des régimes différents parmi 5 internes, 8 externes et 10 demi-pensionnaires.
De combien de façons peut-on le faire ?

E17 : Un terrain est divisé en quatre parcelles. Sur chacune, on peut construire une maison choisie parmi cinq types de maison, ou ne rien construire.

a) Quel est le nombre de possibilités de constructions, sachant que les quatre maisons sont construites ?

b) Même question, sachant que les parcelles peuvent rester sans maison.

c) Même question, sachant que les quatre maisons sont construites, et qu'il y en a au moins deux semblables.

E18 : Déterminer le nombre d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 9999 vérifiant :

a) n est multiple de 5.

b) n contient au moins un 6.

c) n est formé de chiffres distincts.

d) n contient au moins deux chiffres égaux.

[le nombre 12 sera considéré comme tel et non comme 0012]

E19* : On raconte qu'au XVI$^{\text{e}}$ siècle, un jeu consistant à lancer trois dés et à totaliser les points obtenus, se pratiquait à la cour du Grand-Duc de Toscane. Ce dernier avait remarqué qu'on obtenait plus souvent 10 points que 9 points. Et cela le surprenait grandement car, disait-il, 10 et 9 points se décomposent pareillement de six façons.

$9 = 1+2+6$	$9 = 2+2+5$	$10 = 1+3+6$	$10 = 2+4+4$
$9 = 1+3+5$	$9 = 2+3+4$	$10 = 1+4+5$	$10 = 2+3+5$
$9 = 1+4+4$	$9 = 3+3+3$	$10 = 2+2+6$	$10 = 3+3+4$

C'est Galilée qui trouva l'explication. À votre tour...

E20* : Dans le nombre à huit chiffres 1•9•9•5•, on doit remplacer les points par des chiffres en s'arrangeant pour que le nombre obtenu soit divisible par 90. Déterminer combien de nombres différents on peut fabriquer pour satisfaire à cette condition.

6) Combinaisons de p éléments de E_n
Tirage simultané de p objets parmi n
Ensemble des sous-ensembles à p éléments de E_n

a) D6 : Soit deux entiers naturels non nuls n et $p \leq n$.
Soit un ensemble E_n (de cardinal n).
Une *combinaison* de p éléments de E_n est une liste d'éléments de E_n, distincts deux à deux (comme un arrangement), mais dans laquelle l'ordre n'intervient pas.

- **Question** : Que deviennent les arrangements de p éléments de E_n si on ne tient plus compte de l'ordre des éléments de chaque p-liste ?

b) Nombre de combinaisons de *p* éléments de E_n

- **Réponse** : Pour le nombre d'arrangements, on avait trouvé A_n^p. Ici, on ne tient plus compte de l'ordre, des cas distincts vont se retrouver identiques. On va voir qu'on peut les regrouper « par paquets ».
- **Exemple** : L'ensemble des arrangements de 3 éléments de $E_4 = \{a,b,c,d\}$ a $A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ éléments, qui sont (notation simplifiée) :

abc,	*abd*,	*acb*,	*acd*,	*adb*,	*adc*,
bac,	*bad*,	*bca*,	*bcd*,	*bda*,	*bdc*,
cab,	*cad*,	*cba*,	*cbd*,	*cda*,	*cdb*,
dab,	*dac*,	*dba*,	*dbc*,	*dca*,	*dcb*.

- Si on ne tient plus compte de l'ordre des éléments dans le triplet, on remarque que les triplets *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* et *cba* représentent le même trio (sans ordre) $\{a,b,c\}$, et les autres triplets peuvent de même être regroupés par « paquets » de 6.
- Il n'y a donc que 24/6 = 4 combinaisons de 3 éléments de E_4, qui sont, en privilégiant l'ordre alphabétique : *abc*, *abd*, *acd* et *bcd*.
- Le diviseur 6 est en fait le nombre de permutations de 3 éléments, donc 3 !
- **Conclusion** : Si on considère les 6 éléments *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* et *cba*, ils définissent un seul sous-ensemble pour ce problème, mais 3 ! = 6 arrangements pour le problème précédent.

- **T5** : Le nombre de combinaisons de p éléments de E_n est égal à $\dfrac{A_n^p}{p!}$, que l'on notera $\dbinom{n}{p}$.

c) Ou encore : C'est le nombre de façons de tirer simultanément (donc tirage sans ordre et bien sûr sans remise) de p objets parmi n.

d) Autrement dit :

Sous-ensembles de E_n à p éléments

- Le nombre de combinaisons de p éléments de E_n est le nombre de sous-ensembles de E_n ayant p éléments.
- En effet, les sous-ensembles de $E_4 = \{a,b,c,d\}$ ayant 3 éléments sont $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$ et $\{b,c,d\}$, qui correspondent aux cas cités plus haut.

E21 : Combien de poignées de mains se donnent n personnes sachant que deux quelconques d'entre elles se serrent une seule fois la main ?

E22 : À la fin d'une soirée, tout le monde s'en va, par couples. Cent douze poignées de mains sont ainsi échangées. Combien y avait-il de personnes dans cette soirée, sachant que chacun salue tout le monde sauf son conjoint ?

E23 : Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés, sachant qu'une diagonale est un segment joignant deux sommets distincts non consécutifs.

E24 : On considère un hexagone régulier (*ABCDEF*).
a) Déterminer le nombre de triangles dont les trois sommets sont parmi les 6 sommets de l'hexagone.
b) Déterminer parmi ceux-là ceux qui sont :
- ➢ équilatéraux
- ➢ rectangles
- ➢ isocèles non équilatéraux

E25 : Déterminer le nombre de combinaisons au loto (tirage de cinq nombres parmi 49, et d'un nombre complémentaire parmi les restants).

E26 : Combien y a-t-il de distributions de 18 cartes d'un jeu de tarot pour 4 joueurs, sachant qu'il y a 78 cartes et qu'il y aura donc un « talon » de 6 cartes ?

E27 : Le jeu de dominos est constitué de rectangles sur lesquels sont inscrits deux chiffres de 0 à 6 (sans ordre, égaux ou distincts).
a) Combien y a-t-il de dominos différents ?
b) Combien y a-t-il de distributions de sept dominos pour quatre joueurs ?

E28 : Le « 421 » est un jeu où on lance trois dés et où on s'intéresse au nombre formé par les trois chiffres obtenus, indépendamment de l'ordre. Déterminer le nombre de résultats possibles et en faire la liste.

E29 : On compose au hasard sur un cadran de téléphone un numéro de huit chiffres. Déterminer le nombre de numéros différents :
a) avec 8 chiffres pairs.
b) avec 3 zéros exactement.
c) dont la somme des chiffres est 64.
d) avec au moins 3 fois le chiffre 1.

E30 : Dans une urne se trouvent :
six boules blanches, numérotées de 1 à 6
et cinq boules rouges numérotées de 1 à 5.
On tire simultanément quatre boules.
1) Quel est le nombre de façons d'avoir :
a) quatre boules blanches.
b) au moins une boule rouge.
c) une blanche et un numéro 3 exactement.
2) Mêmes questions en tirant successivement et sans remise.

E31 : Une urne contient douze boules.
- cinq sont blanches et numérotées 1, 2, 3, 4 et 5
- quatre sont noires et numérotées 1, 2, 3 et 4
- trois sont rouges et numérotées 1, 2 et 3

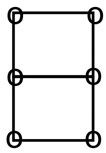
On tire simultanément quatre boules de l'urne.
Calculer le nombre de tirages possibles :

a) en tout.
b) contenant quatre boules de même couleur.
c) contenant au moins une boule blanche.
d) contenant quatre numéros distincts deux à deux.

E32 : Un joueur de bridge reçoit une « main » de 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes.
Déterminer le nombre de mains :
a) en tout.
b) contenant exactement un cœur.
c) contenant exactement deux cœurs.
d) contenant au moins deux cœurs.
e) contenant au moins un cœur mais aucun pique.

E33 : Dans un sac se trouvent :
cinq jetons verts numérotés de 1 à 5
et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4.
On tire simultanément trois jetons du sac.
Déterminer le nombre de tirages possibles :
a) en tout.
b) ne contenant que des jetons verts.
c) ne contenant que des jetons ayant un numéro pair.
d) contenant au moins deux jetons verts.
e) contenant exactement un jeton vert et exactement un jeton numéroté 2.
f) tels que les trois jetons aient même couleur.
g) tels que la somme des trois numéros sur les jetons vaille 13.

E34 : Un caractère de l'écriture en Braille destiné aux aveugles est formé de points obtenus en piquant la feuille de papier à travers au moins un des six trous de la grille ci-dessous :



a) Combien de caractères Braille peut-on concevoir ?
b) Dénombrer les caractères Braille à quatre points.
c) Dénombrer les caractères Braille formés de quatre points qui soient les sommets d'un rectangle.

E35* : Quatre personnes, Aline, Bernard, Charlotte et Denis, veulent se partager 10 pommes identiques, chacun en ayant au moins une. De combien de façons le partagent peut-il se faire ? (*On ne s'intéresse qu'au nombre de pommes de chacun.*)

E36* : Déterminer le nombre de façons de partager un ensemble à $p + q$ éléments en deux sous-ensembles disjoints, l'un à p éléments et l'autre à q éléments.

E37* : Un damier carré comporte 25 cases. Déterminer le nombre de façons de placer 5 pions identiques de telle sorte qu'il y en ait exactement un par ligne et un par colonne.

E38* : De combien de façons peut-on placer trois tours identiques sur un échiquier carré de 64 cases pour qu'aucune des tours ne soit en prise entre elles ?

7) Propriétés des combinaisons

a) Écritures et calculs

- Le nombre de combinaisons de p éléments de E_n, ensemble de n éléments, est l'entier qui se lit « *combinaison* p *parmi* n » et est donc noté $\binom{n}{p}$.
- **P2 :** Il est égal à : $\dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.
- **Remarque** : La formule $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ est utile pour des calculs littéraux avec n et p. Cependant, pour les calculs numériques, on privilégiera :
$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!}$$
- **P3 :** Puisqu'une combinaison est un entier, on a ainsi prouvé que le produit de p entiers consécutifs est toujours divisible par p ! (factoriel p).
- **Exemple** : Le nombre de « mains » de 5 cartes choisies parmi les 32 cartes d'un jeu est :
$$\binom{32}{5} = \frac{A_{32}^5}{5!} = \frac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2\times1}$$
$$= \frac{{}^{8}\cancel{32}\times31\times\cancel{30}\times29\times28}{\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1} = 201\,376$$

b) Formules de base

- Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$:
- **P4** : <u>*Exemples*</u> : $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$
- **P5** : <u>*Symétrie*</u> : $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$
- **P6** : <u>*Formule de Pascal*</u> : $\boxed{\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}}$
- **Remarque** : On peut faire des démonstrations algébriques mais aussi « ensemblistes » des propriétés **P5** et **P6**, c'est-à-dire en se plaçant sur des ensembles ayant pour cardinaux n ou $n + 1$.

c) Triangle de Pascal

- La formule ci-dessus permet de représenter les $\binom{n}{p}$ pour les premières valeurs de p et n dans un tableau appelé « triangle », car les valeurs de la partie supérieure droite sont nulles.

n \ p	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	+ 20	15	6	1			
7	1	7	21	= 35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

d) Recherche des « coefficients du binôme »

- Cherchons le développement de $(x+1)^n$, où x est un réel et n un entier strictement positif.

$(x+1)^n$ peut être mis sous la forme : $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$.

Or, $(x+1)^n$ = $(x+1) \dots (x+1)$, (n facteurs).

- Le coefficient c_k cherché est le nombre de fois que l'on trouve x^k dans le développement.
- **P7 :** On a donc : $c_k = \binom{n}{k}$, d'où : pour tout réel x, pour tout entier $n \geq 0$, $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

e) Formule du Binôme de Newton

- En posant $x = \frac{a}{b}$ dans la formule ci-dessus, on obtient le développement de $(a+b)^n$

- **T6** : Pour tout couple (a, b) de réels, pour tout entier $n > 0$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{n} a^n + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{0} b^n$$

Les $\binom{n}{k}$ sont appelés *coefficients binomiaux*.

f) Quelques conséquences :

- **P8** : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. On obtient cette formule en posant $a = b = 1$ dans la formule précédente.
On remarquera que c'est le nombre de sous-ensembles d'un ensemble contenant n éléments.
- **Exemple pour n = 3 :** Si $E_3 = \{a, b, c\}$, il y a :
  - un sous-ensemble à 0 élément : $\varnothing$,
  - 3 sous-ensembles à 1 élément : $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c\}$,
  - 3 sous-ensembles à 2 éléments : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$
  - 1 sous-ensemble à 3 éléments : E_3 lui-même
- donc $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$ sous-ensembles de E_3.
- **P9 :** On a de même le développement de la puissance n-ième d'une différence :

$$(a-b)^n = \binom{n}{n} a^n - \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \dots + (-1)^n \binom{n}{0} b^n$$

c'est-à-dire : $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

- **Remarque :** Cette égalité se déduit de la première en remplaçant b par $-b$.

- **Exemples** :
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a\,b^3 + b^4$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

E39 : Développer $(2a-b)^6$ et $(3x+2y)^5$.

E40 : Déterminer le nombre de façons de choisir, parmi n marins, un capitaine et p équipiers ($n \geq p+1$)

a) En choisissant d'abord le capitaine, puis les p équipiers.

b) En choisissant d'abord les p équipiers, puis le capitaine.

c) En choisissant d'abord $p + 1$ marins, puis le capitaine parmi eux.

d) En déduire une relation entre $\binom{n-1}{p}$, $\binom{n}{p}$ et $\binom{n}{p+1}$, que l'on prouvera à nouveau par un calcul direct.

E41* : Montrer les formules suivantes (plusieurs démonstrations possibles).

a) Pour tout couple (n ; p) d'entiers tels que $n > p$,

$$A_n^p = p\, A_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p.$$

b) Pour tout entier $n > 0$, $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$.

g) RÉSUMÉ : Nombre de façons de tirer p objets parmi n objets

	AVEC REMISE	SANS REMISE
AVEC ORDRE	n^p	A_n^p
SANS ORDRE	(*)	$\binom{n}{p}$

(*) Pour information : Le nombre de façons de tirer p objets parmi n <u>sans ordre</u> et <u>avec remise</u> est :

$$\binom{n+p-1}{p}$$

E42 :** ***Formule de Leibniz*** : Soit f et g deux fonctions n fois dérivables sur I, alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et : $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$ où $f^{(k)}$ est la dérivée k-ième de f. (Par convention, $f^{(0)} = f$).

E43 :** Prouver que, parmi les n ! permutations des éléments de l'ensemble E_n, il y en a $n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ qui sont totalement désordonnées, *i.e.* pour lesquelles, pour tout entier k entre 1 et n, $f(k)$ est différent de k.