SIMILITUDES PLANES

(Dans tout ce chapitre, on se place dans le plan.)

I) Définition d'une similitude

- **Définition D1** : On appelle *similitude du plan* toute transformation (application bijective) σ du plan dans lui-même qui conserve les rapports de distances, c'est-à-dire :

> Pour tous points *A*, *B*, *C* et *D*, avec $A \neq B$ et $C \neq D$, dont les images respectives par σ sont *A'*, *B'*, *C'* et *D'*, alors : $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB}{CD}$

- **Théorème T1** : Soit σ une transformation. σ est une similitude si et seulement s'il existe un unique réel *k* est strictement positif tel que, pour tous points *A* et *B*, d'images respectives *A'* et *B'* par σ, on a :

$$A'B' = k\ AB$$

- Le réel *k* est appelé le *rapport* de la similitude.
- **Exemple :** une homothétie de rapport λ est une similitude de rapport $|\lambda|$.
- **Propriété P1** : Une isométrie du plan, qui est une transformation qui conserve les distances, est donc une similitude de rapport 1.
- **Exemples** : Les translations, rotations, réflexions (symétries axiales orthogonales) sont des isométries.

II) Premières propriétés des similitudes

- **P2** : La composée de deux similitudes de rapports k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 \times k_2$.
- **Cas particulier** : La composée de deux isométries est une isométrie.
- **Généralisation :** La composée de plusieurs similitudes est une similitude.
- **P3** : La réciproque d'une similitude (qui existe puisqu'elle est bijective) de rapport *k* est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.
- **Cas particulier** : La réciproque d'une isométrie est une isométrie.
- **P4** : La composée d'une similitude de rapport *k* et d'une homothétie de rapport $\dfrac{1}{k}$ est une isométrie.
- **P5** : Ainsi, toute similitude de rapport *k* pour être considérée (de plusieurs façons) comme la composée d'une homothétie de rapport *k* et d'une isométrie.

III) Effets d'une similitude

1) Conservation des angles géométriques

- **P6** : Soit une similitude σ de rapport *k*.
  Pour tous points *A*, *B* et *C*, d'images respectives *A'*, *B'* et *C'* par σ, on a :

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = k^2 \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right)$$

- **T2** : Une similitude conserve les angles géométriques, c'est-à-dire, avec les notations précédentes :

$$\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$$

- **P7 :** Une similitude transforme trois points alignés en trois points alignés.
- **P8 :** Si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, alors les droites $(A'B')$ et $(A'C')$ sont aussi perpendiculaires.

2) Conservation du barycentre

- **T3** *(démonstration non exigible)* : Une similitude conserve le barycentre, c'est-à-dire :
  si $\left\{ (A_i\,;\alpha_i),\, i \in [\![1\,;n]\!] \right\}$ est un système de points pondérés dont la somme des coefficients $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ est non nul, et dont le point *G* est le barycentre, alors $G' = \sigma(G)$, image de *G* par une similitude σ est le barycentre de $\left\{ (\sigma(A_i)\,;\alpha_i),\, i \in [\![1\,;n]\!] \right\}$.

3) Image de configurations par une similitude

- **P9** : L'image de la droite (AB) par une similitude σ est la droite $(A'B')$, avec $A' = \sigma(A)$ et $B' = \sigma(B)$.
- **P10** : L'image du segment $[AB]$ par une similitude σ est le segment $[A'B']$, avec $A' = \sigma(A)$ et $B' = \sigma(B)$.
- **P11** : L'image du cercle de centre Ω et de rayon *R* par une similitude σ de rapport *k* est le cercle de centre $\sigma(\Omega)$ et de rayon *kR*.

IV) Similitudes directes

1) Définition

- **D2** : Une *similitude directe* σ est une similitude qui conserve les angles orientés, c'est-à-dire :
- Pour tous points *A*, *B*, *C* et *D*, avec $A \neq B$ et $C \neq D$, d'images respectives *A'*, *B'*, *C'* et *D'* par σ, alors :

$$\left(\overrightarrow{A'B'}\,; \overrightarrow{C'D'} \right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}\,; \overrightarrow{CD} \right)\ [2\pi]$$

- **Exemples** : Les translations, les homothéties et les rotations sont des similitudes directes.

2) Écriture complexe d'une similitude directe

- **T4** *(Première partie de l'équivalence)* **:**
  Soit deux nombres complexes *a* et *b*, avec *a* non nul. Alors l'application σ du plan dans lui-même qui, au point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe :

$$z' = a\,z + b$$

est une similitude directe de rapport $|a|$.

- **P12** *(Lemme)* : Soit P, Q et R trois points distincts deux à deux, dont les images respectives par une similitude directe σ sont P', Q' et R', alors leurs affixes vérifient :

$$\boxed{\frac{r'-p'}{q'-p'}=\frac{r-p}{q-p}}$$

- **T5** *(Deuxième partie de l'équivalence)* :
Soit σ une similitude directe qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'. Alors il existe deux nombres complexes a et b, avec a non nul, tels que :

$$\boxed{z'=a\,z+b}$$

- Le rapport de la similitude directe est $|a|$.

- **D3** : L'égalité $z'=a\,z+b$ est appelée l'*<u>écriture complexe</u>* de la similitude directe σ.

- **P13** : Soit les points A, B, A' et B', avec $A\neq B$ et $A'\neq B'$. Alors il existe une unique similitude directe σ telle que $\sigma(A)=A'$ et $\sigma(B)=B'$.

3) Angle d'une similitude directe

- **P14** : Soit σ une similitude directe. Soit les points A, B, C et D, avec $A\neq B$ et $C\neq D$, dont les images respectives par σ sont A', B', C' et D', alors :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{C'D'}\right)\ [2\pi]}$$

- **D4** : Avec les notations précédentes, on appelle *<u>angle</u>* d'une similitude directe l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A'B'}\right)$.

- **T6** : Soit σ la similitude directe d'équation complexe $z'=a\,z+b$, alors σ est la similitude directe :

  d'angle $\theta\equiv\arg(a)\ [2\pi]$ et de rapport $|a|$.

4) Exemples

- Une <u>translation</u> est une similitude directe de rapport 1 et d'angle nul.

- Une <u>homothétie</u> de rapport k est une similitude directe de rapport $|k|$ et d'angle $\arg(k)$, donc d'angle 0 si $k>0$ et d'angle π si $k<0$.

- Une <u>rotation</u> de centre Ω et d'angle θ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle θ.

5) Composée et réciproque

- **P15** : La composée de deux similitudes directes σ_1 et σ_2 de rapports respectifs k_1 et k_2 et d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est une similitude directe $\sigma_2\circ\sigma_1$ de rapport $k_1\times k_2$ et d'angle $\theta_1+\theta_2$.

- **P16** : La réciproque d'une similitude directe σ de rapport k et d'angle θ est une similitude directe σ^{-1} de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

V) Classification des similitudes directes

1) Notion de point invariant

- **D5** : Soit f une application du plan. On dit qu'un point Ω est *<u>invariant</u>* par f si et seulement si $f(\Omega)=\Omega$.
On dit aussi que Ω est un *<u>point fixe</u>* de f.
- **T7** : La seule similitude du plan ayant au moins trois points invariants non alignés est l'*<u>identité</u>* (encore appelée *<u>application identique</u>*), qui, à tout point M, associe le point M lui-même.

2) Décomposition canonique d'une similitude directe

- **T8** : Soit σ la similitude directe d'équation complexe $z'=az+b$, donc d'angle $\theta\equiv\arg(a)\ [2\pi]$ et de rapport $k=|a|$. On a les deux cas suivants :

> - Si $a=1$, alors σ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b. Si $b=0$, alors σ est l'identité, sinon σ n'a pas de points invariants.
> - Si $a\neq 1$, σ admet un unique point invariant Ω, d'affixe $\omega=\frac{b}{1-a}$. Le point Ω est appelé le *<u>centre</u>* de la similitude directe.

- **T9** : Dans ce cas, la similitude directe σ peut s'écrire comme la composée commutative $h\circ r=r\circ h$:

> - de l'homothétie h de centre Ω et de rapport $|a|$,
> - de la rotation r de centre Ω et d'angle $\arg(a)$.

- L'écriture complexe $z'=az+b$ peut alors se présenter sous la forme $z'-\omega=a(z-\omega)$, donc sous la forme

$$\boxed{z'-\omega=|a|e^{i\arg(a)}(z-\omega)}$$

- On retrouve bien la composée :
  - de l'homothétie définie par $z'-\omega=k(z-\omega)$
  - et de la rotation définie par $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$

3) Déplacements du plan

- **D6** : On appelle *<u>déplacement</u>* du plan toute *<u>isométrie</u>* (dite *<u>positive</u>*) qui conserve les angles orientés ou encore toute similitude directe de rapport 1.
- **T10** : Les déplacements du plan sont :
  les <u>translations</u> et les <u>rotations</u>

4) Composées de déplacements

- **P17** : La composée de deux déplacements est un déplacement. Plus précisément, la composée :
  - de deux <u>translations</u> est une <u>translation</u>
  - d'une <u>rotation</u> est une <u>translation</u> autre que l'identité est une <u>rotation</u> de même angle
  - de deux <u>rotations</u> d'angles α et β est :
    - une <u>rotation</u> d'angle $\alpha+\beta$ si $\alpha+\beta$ n'est pas congru à 0 modulo 2π
    - une <u>translation</u> si $\alpha+\beta\equiv 0[2\pi]$

5) Composées de similitudes directes

- **P18 :** La composée de deux similitudes directes est une similitude directe, donc soit une translation, soit une composée commutative $h \circ r = r \circ h$ d'une homothétie et d'une rotation de même centre. Pour plus de précisions sur la nature et les éléments caractéristiques de la composée, on peut utiliser l'écriture complexe, ou encore la propriété **P17** sur la composée des déplacements, et aussi :
- **P19 :** La composée de deux homothéties de rapport k_1 et k_2 est :
  - ➢ une translation lorsque $k_1 \times k_2 = 1$
  - ➢ une homothétie de rapport $k_1 \times k_2$ sinon

VI) Similitudes indirectes

1) Définition et exemples

- **D7** : Une *similitude indirecte* est une similitude qui n'est pas directe.
- **Exemples** : Une réflexion *s*, la composée $t \circ s$ avec une translation et la composée $h \circ s$ avec une homothétie, sont des similitudes indirectes.
- **T11** : La seule similitude, directe ou indirecte, autre que l'identité, ayant au moins deux points distincts invariants *A* et *B*, est la réflexion d'axe (*AB*).

2) Écriture complexe d'une similitude indirecte

- **T12** *(Première partie de l'équivalence)* :
  Soit deux complexes *a* et *b*, avec *a* non nul.
  Alors l'application σ du plan dans lui-même qui, au point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe :

$$\boxed{z' = a\,\overline{z} + b}$$

est une similitude indirecte de rapport $|a|$.

- **P20** *(Lemme)* : Soit σ une similitude indirecte. Soit *A* et *B* deux points distincts dans le plan. Il existe alors une similitude directe *f* telle que $\sigma = f \circ s_{(AB)}$ où $s_{(AB)}$ est la réflexion d'axe (AB).
- **T13** *(Deuxième partie de l'équivalence)* :
  Soit σ une similitude indirecte qui, au point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe *z'*. Alors il existe deux nombres complexes *a* et *b*, avec *a* non nul, tels que :

$$\boxed{z' = a\,\overline{z} + b}$$

- Le rapport de la similitude directe est $|a|$.
- **P21** : Toute similitude indirecte transforme tout angle orienté en son opposé.
- **P22 :** La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.
- **P23 :** La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
- **P24 :** La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
- **P25** : Soit les points *A*, *B*, *A'* et *B'*, avec $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors il existe une unique similitude indirecte σ telle que $\sigma(A) = A'$ et $\sigma(B) = B'$.

3) Antidéplacements du plan

- **D8** : On appelle *antidéplacement* du plan toute *isométrie* (dite *négative*) qui transforme les angles orientés en leur opposé ou encore toute similitude indirecte de rapport 1.
- **Exemple** : La réflexion est un antidéplacement.
- **P26** : La composée de deux réflexions, qui sont des antidéplacements, est un déplacement.
  Plus précisément, la composée $s_{(D')} \circ s_{(D)}$ de deux réflexions d'axes respectifs (*D*) et (*D'*) est :
  - ➢ une translation si (*D*) et (*D'*) sont parallèles.
    Son vecteur est normal à ces deux droites, et vaut le double de celui qui transforme (*D*) en (*D'*).
  - ➢ une rotation si (*D*) et (*D'*) sont sécants en Ω.
    Son centre est Ω, et son angle est le double de l'un des angles $\left(\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}\right)$, où *M* est sur (*D*) et *M'* sur (*D'*), tous deux autres que Ω.
- **P27** ***(pour information)*** **:** Toute translation *t* peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes parallèles dont les axes ont le vecteur de *t* comme vecteur normal, et que l'un des deux axes peut-être choisi arbitrairement.
  De même, toute rotation *r* peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes sécants, de point d'intersection le centre de *r*, et que l'un des deux axes peut-être choisi arbitrairement.
- **P28** : En appliquant la propriété **P20** aux antidéplacements, on peut affirmer qu'ils sont les composées d'un déplacement et d'une réflexion.
  Ils sont donc constitués des composées $t \circ s$ et $r \circ s$, où *t*, *r* et *s* sont respectivement une translation, une rotation et une réflexion.
- **P29** ***(pour information)*** : En associant les deux propriétés précédentes, on peut montrer que l'ensemble des antidéplacements est constitué des réflexions et de la composée commutative $t \circ s = s \circ t$ d'une réflexion *s* et d'une translation *t* non identique dont le vecteur dirige l'axe de *s* ; une telle transformation s'appelle une *symétrie glissée*. Elle n'a pas de points invariants.

VII) Triangles semblables

- **D9** : On dit que deux triangles (*ABC*) et (*A'B'C'*) sont *semblables* lorsqu'il existe une similitude qui transforme les sommets de l'un sur ceux de l'autre.
  On précise *directement semblables* (respectivement *indirectement semblables* lorsque la similitude est directe (respectivement. indirecte).
- **T14** : Soit (*ABC*) et (*A'B'C'*) deux triangles.
  Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe une similitude telle que $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ et $C' = \sigma(C)$.
2) $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$, $\widehat{C'B'A'} = \widehat{CBA}$ et $\widehat{A'C'B'} = \widehat{ACB}$
3) $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$ et $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$
4) $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA}$