(IN)ÉQUATIONS IRRATIONNELLES

I) *Équations irrationnelles*

On s'intéresse ici au cas $\sqrt{P(x)} = Q(x)$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes.

Méthode :

- Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'équation a un sens, c'est-à-dire telles que $P(x) \geq 0$.
- On veut ensuite élever au carré pour « *éliminer la racine* » et avoir ainsi une équation polynomiale. Il faut cependant s'assurer que l'on raisonne par équivalence, en appliquant la propriété fondamentale suivante :

$$(\sqrt{P} = Q \text{ et } P \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad (P = Q^2 \text{ et } Q \geq 0)$$

- On résout donc l'inéquation $Q(x) \geq 0$, puis l'équation $P(x) = Q^2(x)$. On cherche ensuite l'intersection de ces trois ensembles de solutions.

Remarque : La résolution de l'inéquation $P(x) \geq 0$ est inutile ici puisque l'égalité $P(x) = Q^2(x)$ la traduit déjà. Cependant, il peut être utile de l'étudier systématiquement pour ne pas l'oublier dans d'autres (in)équations où elle est indispensable (*voir II*).

Exercice 1 – Résoudre l'équation : $\sqrt{2x+5} = 3x-3$

- L'équation n'a de sens que pour $2x + 5 \geq 0$, c'est-à-dire :
- Le membre de gauche étant constitué d'un radical, on doit avoir : $3x - 3 \geq 0$, *i.e.*
- On peut alors élever de façon équivalente les deux membres de l'équation au carré et on obtient :
- Résolution :
- Vérification de validité et solution :

II) *Inéquations irrationnelles*

On s'intéresse ici aux cas :	
$\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$	$\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$
où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes	

Méthode :

- Comme précédemment, et indispensable ici, résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$
- Étudier ensuite le signe de $Q(x)$
- Les valeurs de x telles que $Q(x) < 0$ sont :

<u>non valables</u>	<u>valables</u>

puisqu'un nombre positif est effectivement supérieur à un nombre négatif.

- Pour les valeurs telles que $Q(x) \geq 0$, on peut élever au carré de façon équivalente, et résoudre alors : $P(x) \geq Q^2(x)$.
- Si l'inéquation est stricte (avec < ou >), on raisonne de la même façon, en ôtant les solutions de l'équation (cas =)
- On présentera l'ensemble des solutions sur forme (de réunion) d'intervalles, et éventuellement grâce à un hachurage symbolique.

Exercice 2 – Résoudre les inéquations :

$$\sqrt{x-3} \leq 7-2x$$

- L'inéquation n'a de sens que pour $x - 3 \geq 0$, c'est-à-dire :
- Si $7 - 2x < 0$,
- Si $7 - 2x \geq 0$, c'est-à-dire
- on élève au carré de façon équivalente, et on a :
- Résolution :
- Solution :

$$\sqrt{2x+1} > x-1$$

- L'inéquation n'a de sens que pour $2x + 1 \geq 0$, c'est-à-dire :
- Si $x - 1 < 0$,
- Si $x - 1 \geq 0$, c'est-à-dire
- on élève au carré de façon équivalente, et on a :
- Résolution :
- Solution :