

✎ Corrigé du baccalauréat S – Nouvelle Calédonie ✎

26 novembre 2019

A. P. M. E. P.

Exercice 1

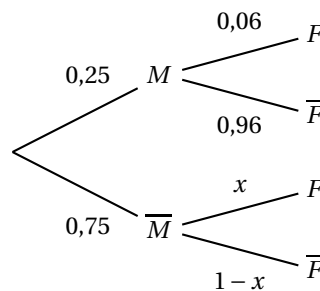
5 points

Commun à tous les candidats

1. D'après l'énoncé $P(M) = 0,25$, donc $P(\overline{M}) = 1 - 0,25 = 0,75$. D'autre part $P_M(F) = 0,06$.

Donc $P_M(\overline{F}) = 1 - 0,06 = 0,96$.

On peut commencer l'arbre pondéré :



Il faut trouver $P_F(M) = \frac{P(F \cap M)}{P(F)} = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{P(M) \times P_M F}{P(F)} = \frac{0,25 \times 0,06}{0,0225} = \frac{0,0150}{0,225} = \frac{150}{225} = \frac{3 \times 50}{9 \times 25} = \frac{3 \times 2 \times 25}{3 \times 3 \times 25} = \frac{2}{3}$.

2. Soit $x = P_{\overline{M}}(F)$.

On sait d'après la loi des probabilités totales que :

$P(F) = P(M \cap F) + P(\overline{M} \cap F)$ soit d'après l'énoncé :

$$0,0225 = 0,25 \times 0,06 + 0,75 \times x \iff 0,0225 = 0,0150 + 0,75x \iff 0,75x = 0,0075 \iff x = 0,01.$$

La probabilité qu'un carreau avec motif soit fissuré est égale à 1 %.

Partie B

1. On a donc $P(10,1 \leq X \leq 11,9) = 0,99$, donc :

$$P(X \leq 10,1) + P(X \geq 11,9) = 1 - 0,99 = 0,01.$$

Mais par symétrie $P(X \leq 10,1) = P(X \geq 11,9)$, donc

$$P(X \leq 10,1) = P(X \geq 11,9) = \frac{0,01}{2} = 0,005.$$

2.

$$Z = \frac{X - 11}{\sigma}.$$

a. La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

b. De $10,1 \leq X \leq 11,9$ on en déduit successivement :

$$-0,9 \leq X - 11 \leq 0,9 \iff -\frac{0,9}{\sigma} \leq \frac{X - 11}{\sigma} \leq \frac{0,9}{\sigma} \text{ et d'après la question 1.}$$

$$P\left(Z \leq -\frac{0,9}{\sigma}\right) = 0,005.$$

c. La calculatrice donne $\sigma \approx 0,35$ au centième près.

Partie C

$$f(x) = -1,5 \cos(x) + 1,5$$

1. f est dérivable sur $[0; 2\pi]$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = -1,5 \times (-\sin x) = 1,5 \sin x.$$

On sait que sur $[0; \pi]$, $\sin(x) \geq 0$ et donc $f'(x) \geq 0$ et

que sur $[\pi; 2\pi]$, $\sin x \leq 0$ et donc $f'(x) \leq 0$.

La fonction f est donc croissante sur $[0; \pi]$ de $f(0) = -1,5 + 1,5 = 0$ à $f(\pi) = -1,5 \times (-1) + 1,5 = 3$, puis décroissante de $f(\pi) = 3$ à $f(2\pi) = -1,5 + 1,5 = 0$.

Conclusion : sur $[0; 2\pi]$, $f(x) \geq 0$.

2. La forme d'un carreau est celle de la zone délimitée par les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

La fonction f étant positive l'aire de la surface limitée par la courbe \mathcal{C}_1 et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2\pi$ est égale (en unité d'aire à l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ et par raison évidente de symétrie l'aire du carreau est égale à :

$$2 \int_0^{2\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{2\pi} [f(x)] - 1,5 \cos x + 1,5 dx = 2[-1,5 \sin x + 1,5x]_0^{2\pi} = 2(0 + 1,5 \times 2\pi - (-1,5 \times 0 + 1,5 \times 0)) = 2 \times 3\pi = 6\pi \text{ (unité d'aire).}$$

Exercice 2

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \ln\left(\frac{3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{1} = 3$ et finalement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 3.$$

Ce résultat montre que géométriquement la droite d'équation $y = \ln 3$ est asymptote horizontale à \mathcal{C}_f au voisinage de plus l'infini.

2. a. f est la composée de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{u'}{u}.$$

$$\text{Avec } u(x) = \frac{3x+1}{x+1}, \text{ on a } u'(x) = \frac{3(x+1) - 1 \times (3x+1)}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \frac{2}{(3x+1)(x+1)}.$$

- b. $f'(x)$ quotient de nombres supérieurs à zéro est supérieure à zéro, donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ de $f(0) = \ln \frac{1}{1} = 0$ à $\ln 3$.

Partie B

1. Initialisation : $u_0 = 3$ et $u_1 = \ln\left(\frac{9+1}{3+1}\right) = \ln \frac{10}{4} = \ln \frac{5}{2} \approx 0,92$.

On a bien $\frac{1}{2} \leq u_1 \leq u_0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Par croissance (démontrée en A. 2.) de la fonction f , on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n).$$

$$\text{Or } f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{1}{2}+1}\right) = \left(\frac{5}{3}\right) \approx 0,51 > 0,5.$$

On a donc l'encadrement $\frac{1}{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, il est vrai au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, on a donc démontré que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

2. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$: elle converge donc vers une limite supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, donc positive.

Partie C

1. Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $[x_0; +\infty[$, la fonction g décroît de $g(x_0) \approx 0,088 > 0$ à $-\infty$.

Elle est continue sur cet intervalle car dérivable, donc d'après le principe des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in [x_0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Comme $x_0 > 0$, $\alpha > 0$.

2.

<p>a. $x \leftarrow 0,22$ Tant que $g(x) > 0$ faire $x \leftarrow x + 0,01$ Fin de Tant que</p>

- b. Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n) .

Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans cette partie, le point J a pour coordonnées $\left(1; 1; \frac{2}{5}\right)$

1. I est le centre du carré ADHE, donc en particulier I est le milieu du segment [DE], donc $I\left(\frac{0+0}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{0+1}{2}\right)$ soit $I\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

- a. Avec $F(1; 0; 1)$, $I\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $J\left(1; 1; \frac{2}{5}\right)$, on obtient :

$$\vec{IF} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{IJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } \vec{n} \cdot \vec{IF} = -1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \vec{IJ} = 0 + 3 - 3 = 0.$$

Le vecteur \vec{n} orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FIJ) est un vecteur normal à ce plan.

- b. D'après le résultat précédent on sait que :

$$M(x; y; z) \in (\text{FIJ}) \iff -1x + 3y + 5z = d = 0, \text{ avec } d \in \mathbf{R}.$$

$$\text{Or } F \in (\text{FIJ}) \iff -1 + 0 + 5 = d = 0 \iff d = 4.$$

$$\text{Conclusion : } M(x; y; z) \in (\text{FIJ}) \iff -x + 3y + 5z - 4 = 0.$$

2. a. Si (d) est orthogonale au plan (FIJ) , tout vecteur directeur de (d) , donc en particulier \overrightarrow{BM} est colinéaire au vecteur \vec{n} précédent.

Il existe donc $t \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{BM} = t\vec{n} \iff \begin{cases} x-1 = -t \\ y-0 = 3t \\ z-0 = 5t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1-t \\ y = 3t \\ z = 5t \end{cases}$$

$$\text{Conclusion } M(x; y; z) \in (d) \iff \begin{cases} x = 1-t \\ y = 3t \\ z = 5t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbf{R}.$$

- b. $M(x; y; z)$ a ses coordonnées qui vérifient les équations paramétriques de (d) et l'équation cartésienne du plan, soit :

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 3t \\ z = 5t \\ -x+3y+5z-4 = 0 \end{cases} \Rightarrow -1+t+9t+25t-4=0 \iff 35t=5 \iff$$

$$7t=1 \iff t = \frac{1}{7}.$$

Les coordonnées de M sont donc $M\left(1-\frac{1}{7}; 3 \times \frac{1}{7}; 5 \times \frac{1}{7}\right)$, donc $M\left(\frac{6}{7}; \frac{3}{7}; \frac{5}{7}\right)$.

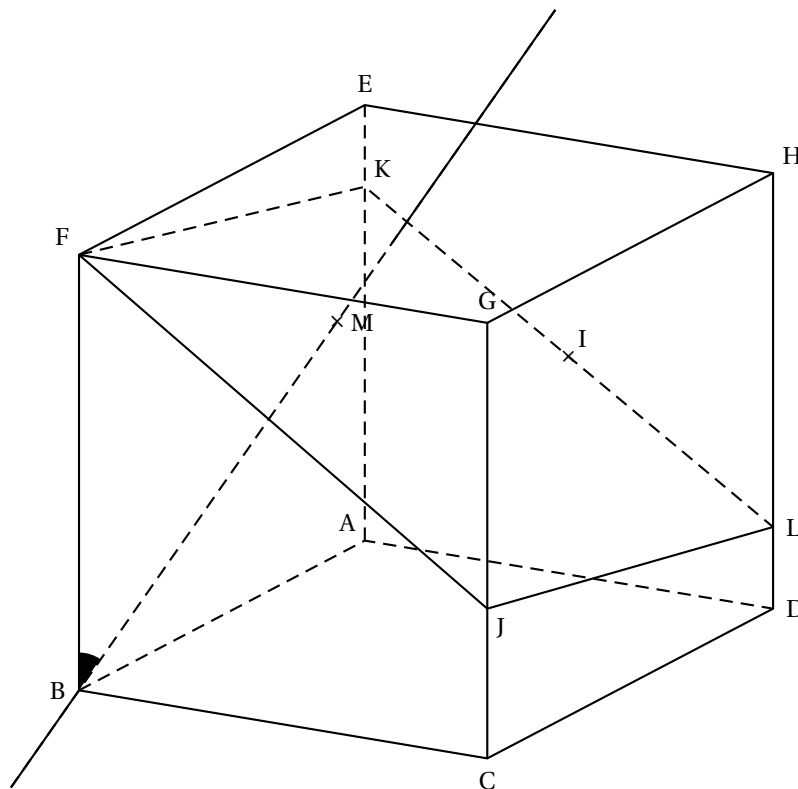


Figure 1

3. a. On a $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} \frac{6}{7}-1 \\ \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BF} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BF} = \frac{5}{7}$.

- b. On sait que le produit scalaire peut aussi s'écrire :

$$\vec{BM} \cdot \vec{BF} = BM \times BF \times \cos \widehat{MBF} \quad (1).$$

$$\text{De façon évidente } BF = 1; \quad BM^2 = \left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{1}{49} + \frac{9}{49} + \frac{25}{49} = \frac{35}{49}.$$

$$\text{Donc } BM = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

L'égalité (1) s'écrit donc :

$$\frac{5}{7} = 1 \times \frac{\sqrt{35}}{7} \times \cos \widehat{MBF} \iff \cos \widehat{MBF} = \frac{5}{\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

La calculatrice donne $\widehat{MBF} \approx 32,31^\circ$ soit 32° au degré près.

Partie B

Dans cette partie, J est un point quelconque du segment [CG].

Ses coordonnées sont donc $(1; 1; a)$, où a est un réel de l'intervalle $[0; 1]$.

1. Les faces (BCGF) et (ADHE) sont parallèles; le plan (FIJ) les coupe donc suivant deux parallèles (FJ) et (KL).

De même les faces (ABFE) et (DCGH) sont parallèles; le plan (FIJ) les coupe donc suivant deux parallèles (FK) et (JL).

Le quadrilatère (FJLK) ayant ses côtés opposés parallèles est donc un parallélogramme.

2. On a $FJ^2 = 1 + (a-1)^2$ et $JL^2 = \frac{1}{4} + \frac{1+a^2}{4}$.

FKLJ est un losange si deux de ses côtés consécutifs ont la même longueur, d'où

$$FJ = JL \iff FJ^2 = JL^2 \iff 1 + (a-1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1+a^2}{4} \iff 1 + a^2 - 2a + 1 = \frac{1+a^2}{4} \iff a^2 - 2a + 2 = \frac{1+a^2}{4} \iff 4(a^2 - 2a + 2) = 1 + a^2 \iff 4a^2 - 8a + 8 = 1 + a^2 \iff 3a^2 - 8a + 7 = 0.$$

Cette équation a pour discriminant : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 7 = 64 - 84 = -20 < 0$: cette équation n'a pas de solution réelle : il n'existe pas de valeur de a pour laquelle le quadrilatère FKLJ est un losange.

Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'équation (E) :

$$25z^2 - 14z + 25 = 0.$$

1. $\Delta = 14^2 - 4 \times 25 \times 25 = 196 - 2500 = -2304 = (48i)^2$

L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{14 + 48i}{50} = \frac{7 + 24i}{25} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{7 - 24i}{25}.$$

2. On a $|z_1|^2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49 + 576}{625} = \frac{625}{625} = 1$, donc $|z_1| = 1$.

Même pour calcul pour z_2 (conjugué de z_1).

Les solutions de (E) sont de module 1.

3. On a $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$.

On sait que $z_2 = \overline{z_1} = e^{-i\alpha}$.

4. On a $\frac{7}{25} = \frac{7 \times 4}{25 \times 4} = \frac{28}{100} = 0,28$. La calculatrice donne aussi $\alpha \approx 74^\circ$.

$$\frac{24}{25} = \frac{24 \times 4}{25 \times 4} = \frac{96}{100} = 0,96.$$

Les deux points représentatifs des solutions de (E) sont donc les points A et D symétriques autour de l'axe des abscisses.

Partie B

1. Affirmation A :

On sait que $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ et que $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, donc :

$$\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = e^{i \frac{\pi}{3}} \text{ et par conséquent :}$$

$$\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2019} = \left(e^{i \frac{\pi}{3}} \right)^{2019} = e^{i \frac{2019\pi}{3}} = e^{i 673\pi} = e^{i(672\pi + \pi)} = e^{i\pi} = -1. \text{ L'affirmation est fausse.}$$

2. **Affirmation B :** On a $\|z\|^2 = \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{4}{36} + \frac{25}{36} = \frac{29}{36}$.

Comme $\|z\|^2 < 1$, $\|z\| < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z|^n = 0$. l'affirmation est vraie.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z|^n = 0.$$

3. Affirmation C :

L'indication peut s'écrire :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1.$$

$$\text{On a donc } \frac{7}{25} = 2\cos^2(a) - 1 \iff 2\cos^2(a) = 1 + \frac{7}{25} = \frac{25}{25} + \frac{7}{25} = \frac{32}{25}, \text{ d'où}$$

$$\cos^2(a) = \frac{1}{2} \times \frac{32}{25} = \frac{32}{50}.$$

Comme $-\pi \leq a \leq \pi$, on a donc $\cos a = \sqrt{\frac{32}{50}}$ ou $\cos a = -\sqrt{\frac{32}{50}}$, et puisque $\sqrt{1 - \left(\frac{32}{50}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{50}}$,

$$\text{on a dans les deux cas : } \sin a = \sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

L'affirmation est fausse.

Exercice 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = \frac{4^{2n+1} + 1}{5}.$$

1. • $a_2 = \frac{4^{4+1} + 1}{5} = \frac{4^5 + 1}{5} = \frac{1025}{5} = 205;$

• $a_3 = \frac{4^{6+1} + 1}{5} = \frac{4^7 + 1}{5} = \frac{16384 + 1}{5} = 3277$

2. Pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{4^{2(n+1)+1} + 1}{5} = \frac{4^{2n+3} + 1}{5} = \frac{4^{(2n+1)+2} + 1}{5} = \frac{4^{2n+1} \times 4^2 + 1}{5} =$
 $\frac{4^{2n+1} \times 4^2 + 16 - 15}{5} = \frac{4^{2n+1} \times 4^2 + 16 - 15}{5} = \frac{16 \times 4^{2n+1} + 16 - 15}{5} = 16 \frac{4^{2n+1} + 1}{5} - \frac{15}{5} =$
 $16a_n - 3.$

3. • Par récurrence :

– $a_0 = 1$: la propriété est vraie au rang zéro ;

– Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$; alors $16a_n \in \mathbb{N}$ et d'après le résultat précédent

$$16a_n - 3 = a_{n+1} \in \mathbb{N}.$$

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $a_n \in \mathbb{N}$ pour tout naturel.

- Les puissances paires de 4 se terminent par 6 et les puissances impaires par 4, donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, 4^{2n+1} se termine par 4 et donc $4^{2n+1} + 1$ se termine par 5 et est donc multiple de 5 : a_n est donc un naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Dans cette question on utilise l'égalité de la question 2. afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n) .

- a. Tout diviseur commun à a_n et à a_{n+1} et un diviseur commun à $16a_n$ et à a_{n+1} , donc est un diviseur de la différence $16a_n - a_{n+1} = 3$. Or 3 a deux diviseurs 1 et 3.

Conclusion : tout diviseur commun à a_n et à a_{n+1} et en particulier le plus grand est un diviseur de 3, donc est 1 ou 3.

- b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $16 \equiv 1 [3]$ et $-3 \equiv 0 [3]$, donc $16a_n \equiv a_n [3]$ donc finalement $16a_n - 3 = a_{n+1} \equiv a_n [3]$.

- c. On a $a_0 = 1$ et on a bien $1 \equiv 1 [3]$.

Initialisation : le résultat précédent signifie que a_0 n'est pas divisible par 3.

Hérédité : supposons que a_n n'est pas divisible par 3 pour $n \in \mathbb{N}$; alors $16a_n$ n'est pas divisible par 3 et comme 3 est divisible 3, $16a_n - 3 = a_{n+1}$ n'est pas divisible par 3.

La propriété est vraie au rang zéro, et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence a_n n'est pas un multiple de 3 pour $n \in \mathbb{N}$.

- d. On a vu à la question 4. a. que le plus grand commun diviseur d_n à a_n et à a_{n+1} était 1 ou 3. Comme on vient de voir que ce n'est pas 3, c'est donc 1 : les naturels a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Remarque : cette égalité n'est pas difficile à démontrer puisqu'elle relève de l'identité

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

$$\begin{aligned} b_n c_n &= (2^{n+1}(2^n - 1) + 1)(2^{n+1}(2^n + 1) + 1) = (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1) = \\ &= (2^{2n+1} + 1 - 2^{n+1})(2^{2n+1} + 1 + 2^{n+1}) = (2^{2n+1} + 1)^2 - (2^{n+1})^2 = 2^{4n+2} + 2 \times 2^{2n+1} + 1 - 2^{2n+2} = \\ &= (2^2)^{2n+1} + 2^{2n+2} - 2^{2n+2} + 1 = 4^{2n+1} + 1 = 5a_n. \end{aligned}$$

5. a. On a donc pour $n \geq 2$, $5a_n = b_n c_n$. De deux choses l'une :

- ou 5 ne divise pas b_n ; comme 5 est premier et donc premier avec b_n , 5 divise le produit $b_n c_n$ et est premiers avec b_n : d'après le théorème de Gauss 5 divise c_n ;
- ou 5 divise b_n et alors le résultat est acquis.

- b. $b_n = 2^{n+1}(2^n - 1) + 1$, donc $n \geq 2 \Rightarrow 2^n \geq 2^2 \Rightarrow 2^n - 1 \geq 3$; d'autre part $n \geq 2 \Rightarrow n+1 \geq 3 \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2^3$, d'où par produit

$$2^{n+1}(2^n - 1) \geq 3 \times 8 \text{ et enfin } b_n \geq 25 > 5.$$

$$\text{De même } c_n = 2^{n+1}(2^n + 1) + 1$$

$$n \geq 2 \Rightarrow 2^n \geq 2^2 \Rightarrow 2^n + 1 \geq 5; \text{ d'autre part } n \geq 2 \Rightarrow n+1 \geq 3 \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2^3, \text{ d'où par produit}$$

$$2^{n+1}(2^n - 1) \geq 5 \times 8 \text{ et enfin } c_n \geq 40 > 5.$$

- c. On a $a_n = \frac{b_n c_n}{5}$.

$$\text{Donc } a_n = \frac{b_n}{5} \times c_n \text{ ou } a_n = \frac{c_n}{5} \times b_n.$$

D'après les questions précédentes $\frac{b_n}{5}$ ou $\frac{c_n}{5}$ est un naturel au moins égal à 2 puisque b_n et c_n sont supérieurs à 5 et que l'un au moins est un multiple de 5.

a_n est donc le produit de deux naturels différents de 1 : il n'est donc pas premier.