Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ∾ septembre 2019

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A *et* B *peuvent être abordées de façon indépendante.*

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

1. On a $T_0 = 0,9$, puis $T_1 = T_0 - 0,T_0^2 = 0,9 - 0,1 \times 0,81 = 0,9 - 0,081 = 0,819$;
   $T_2 = T_1 - 0,1 \times T_1^2 = 0{,}751\,924 \approx 0,752$; $T_3 = T_2 - 0,1 \times T_2^2 \approx 0,695$ et enfin $T_4 = T_3 - 0,1 \times T_3^2 \approx 0,647$.

   Donc l'estimation de 0,4 est loin du modèle.

2. **a.** La fonction polynôme f est dérivable sur $[0 ; 1]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = 1 - 2 \times 0,1x = 1 - 0,2x$.
   Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 0,2x \leqslant 0,2 \Rightarrow -0,2 \leqslant -0,2x \leqslant 0 \Rightarrow 0,8 \leqslant 1 - 0,2x \leqslant 1$, ce qui montre que $f'(x) > 0$ sur $[0 ; 1]$: la fonction f est donc croissante sur $[0 ; 1]$ de $f(0) = 0$ à
   $f(1) = 1 - 0,1 = 0,9$.

   b. *Initialisation* : on a vu que $0 < 0,819 < 0,9 < 1$ ou $0 < T_1 < T_0 < 1$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
   Hérédité supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :
   $0 < T_{n+1} < T_n < 1$. par croissance de la fonction f on a :
   $f(0) < f(T_{n+1}) < f(T_n) < f(1)$ ou $0 < T_{n+2} < T_{n+1} < 0,9$.
   On a donc $0 < T_{n+2} < T_{n+1} < 1$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
   L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang n quelconque il est vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit le naturel n, $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.

   c. La suite (T_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

   d. La calculatrice donne $T_{14} \approx 0,385$: les spécialistes ont donc raison. $T_{20} \approx 0,31$

Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

1. Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction P quotient de fonctions dérivables et de dénominateur strictement positif, est dérivable et sur cet intervalle :
   $P'(t) = -\dfrac{-0,5 \times 3,6\mathrm{e}^{-0,5t} \times 1\,000}{\left(0,4 + 3,6\mathrm{e}^{-0,5t}\right)^2} = \dfrac{1\,800\mathrm{e}^{-0,5t}}{\left(0,4 + 3,6\mathrm{e}^{-0,5t}\right)^2}$.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,5t} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} 0,4 + 3,6\mathrm{e}^{-0,5t} = 0,4$ et enfin $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{1\,000}{0,4} = 2\,500$.

   $P'(t)$ est un quotient de nombres supérieurs à zéro, on a donc $P'(t) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$.

   La fonction P est donc croissante sur $[0 ; +\infty[$ de $P(0) = \dfrac{1\,000}{0,4 + 3,6} = \dfrac{1\,000}{4} = 250$ à

   $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} P(t) = 2\,500$.

   La fonction P est strictement croissante, continue car dérivable sur $[0 ; +\infty[$ de 250 à 2 500

3. D'après le résultat précédent comme $250 < 2\,000 < 2\,500$, il existe un réél unique $t_0 \in [0~;~+\infty[$ tel que $P\left(t_0\right) = 2\,000$.

La calculatrice donne : $P(7) \approx 1\,965$ et $P(8) \approx 2\,146$, donc $7 < t_0 < 8$; puis

$P(7,1) \approx 1\,987$ et $P(7,2) \approx 2\,007$, donc $7,1 < t_0 < 7,2$.

4. On a trouvé à la question précédente qu'au bout d'un temps t_0 compris entre 7,1 et 7,2 années la population aura atteint les 2 000 individus, donc durant l'année 2026.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} *près.*

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...
Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet.
On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à $0,01$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et de probabilité $0,01$.

2. On a $P(X=2) = \binom{8}{2} \times 0,01^2 \times (1-0,01)^{8-2} = 28 \times 0,01^2 \times 0,99^6 \approx 0,002\,63$ soit $0,002\,6$ à 10^{-4} près.

3. On a $P(X=0) = 0,01^0 \times 0,99^8 \approx 0,922\,7$ et $P(X=1) = 8 \times 0,01 \times 0,99^7 \approx 0,074\,6$.

Donc $P(X \geqslant 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) \approx 1 - (0,922\,7 + 0,074\,6 + 0,002\,6) = 1 - 0,999\,9$ soit $0,000\,1$ ce qui est effectivement négligeable.

Partie B

On sait que $P(R \leqslant 0,4) = P(R \leqslant 1) - P(0,4 \leqslant R \leqslant 1) = 0,5 - P(0,4 \leqslant R \leqslant 1)$.
La calculatrice donne $P(R \leqslant 0,4) \approx 0,228$ (un peu plus de 2 %).

Partie C

1. Voir à la fin.

2. La probabilité demandée est $P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0,075 \times 0,9 = 0,067\,5$.

3. D'après la loi des probabilités totales :

$P(B) = P(Z \cap B) + P(E \cap B) + P(D \cap B) = 0,922 \times 0,99 + 0,074 \times 0,9 + 0,003 \times 0,99 = 0,983\,25$ soit $0,983\,3$ à 10^{-4} près.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **Affirmation 1** : $z^2 = \left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)^2 = 1-3+2\text{i}\sqrt{3} = -2+2\text{i}\sqrt{3}$ qui n'est pas un réel.

   Affirmation 2 : On a $|z|^2 = 1+3 = 4 = 2^2$, d'où $|z| = 2$. On peut en factorisant 2 écrire :

   $z = 2\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\hat{\imath}\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

   Il suit que : $z^{2019} = \left[2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right]^{2019} = 2^{2019}\text{e}^{\text{i}\frac{2019\pi}{3}} = \text{e}^{673\text{i}\pi}$.

   Or $673\pi = 672\pi+\pi$ donc un argument de z^{2019} est π à 2π près.

   L'affirmation est fausse.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2-3z+5 = 0$.

   Affirmation 3 : On a $\Delta = 9-4\times2\times5 = 9-40 = -31$: cette équation a deux solutions complexes : $z_1 - \dfrac{3+\text{i}\sqrt{39}}{4}$ et $z_1 - \dfrac{3-\text{i}\sqrt{39}}{4}$: les images de ces deux complexes sont symétriques autour de l'axe des abscisses. L'affirmation est fausse.

3.
$$z' = \overline{z}(1-z).$$

   Affirmation 4 : $M = M' \iff z' = z = \overline{z}(1-z)$.

   Avec $z = x+\text{i}y$, d'où $\overline{z} = x-\text{i}y$, on obtient :

   $z' = z \iff x+\text{i}y = (x-\text{i}y)(1-x-\text{i}y) \iff x+\text{i}y = x(1-x)-y^2+\text{i}[-xy+y(x-1)]$.

   En identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient respectivement :

   $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x(1-x)-y^2\\ y &=& -xy+y(x-1)\end{array}\right.$

   La première équation donne $x^2+y^2 = 0$, équation qui n'est vérifiée que par le couple $(0\,;0)$.

   La deuxième équation donne $y = -xy+xy-y$ soit : $2y = 0$ d'où $y = 0$.

   Les deux conditions devant être réalisées, le seul point confondu avec son image est l'origine O. L'affirmation est fausse.

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a $\overrightarrow{\text{EI}}\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{EL}}\begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}$; ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et on a :

   $\overrightarrow{\text{EI}}\cdot\overrightarrow{n} = 6-6+0 = 0$ et $\overrightarrow{\text{EL}}\cdot\overrightarrow{n} = 6-6+0 = 0$.

   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à deux vecteurs non colinéaires du plan P est normal à ce plan.

   b. D'après le résultat précédent :

   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in P \iff 1x-2y+2z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.

   Or $\text{E}(0\,;\,0\,;\,6) \in (P) \iff 12 = d$.

   Conclusion : une équation cartésienne du plan P est :

   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in P \iff x-2y-2z = 12$.

2. le triangle EFI est clairement rectangle en F, avec EF = 6 et FI = 3.

L'aire du triangle EFI est donc égale à : $\dfrac{6\times 3}{2} = 9$ cm^2.

Comme FL = 3, le volume du tétraèdre FELI est donc égale à :

$\dfrac{9\times 3}{3} = 9$ cm^3.

3. **a.** On a vu que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P ; c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ qui contient F. Tout point $M(x~;~y~;~z) \in \Delta \iff \overrightarrow{\text{F}M} = t\overrightarrow{n}$ qui se traduit par le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-6 &=& 1t\\ y-0 &=& -2t\\ z-6 &=& -2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+6\\ y &=& -2t\\ z &=& 2t+6\end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

b. Un point $M(x~;~y~;~z)$ est commun à la droite Δ et au plan P si set seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t+6\\ y &=& -2t\\ z &=& 2t+6\\ x-2y-2z &=& 12\end{array}\right..$$

En remplaçant s, y et z dans la dernière équation :

$t+6-2(-2t)+2(2t+6) = -12 \iff t+6+4t+4t+12 = 12 \iff 9t = -6 \iff t = -\dfrac{6}{9} = -\dfrac{2}{3}$.

D'où $x = t+6 = -\dfrac{2}{3}+6 = \dfrac{-2+18}{3} = \dfrac{16}{3}$; $y = -2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{3}$; $z = 6+2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 6-\times\left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{14}{3}$.

Donc $\text{K}\left(\dfrac{16}{3}~;~\dfrac{4}{3}~;~\dfrac{14}{3}\right)$.

4. Le tétraèdre FELI vu à la question **2.** de base le triangle ELI a pour hauteur [FK].

Donc $V(\text{FELI}) = \dfrac{\mathscr{A}(\text{ELI})\times \text{FK}}{3}$.

Or $V(\text{FELI}) = 9$ cm^3 et $\text{FK}^2 = \left(\dfrac{16}{3}-6\right)^2 + \left(\dfrac{4}{3}-0\right)^2 + \left(\dfrac{14}{3}-6\right)^2 = \dfrac{4}{9}+\dfrac{16}{9}+\dfrac{16}{9} = \dfrac{36}{9} = 4$, d'où FK = 2.

On a donc $9 = \dfrac{\mathscr{A}(\text{ELI})\times 2}{3}$, d'où $\mathscr{A}(\text{ELI}) = \dfrac{27}{2} = 13,5$ cm^3.

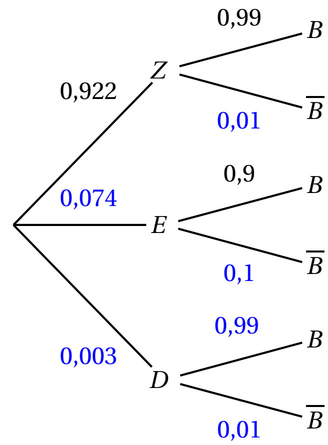
5. I et L étant les milieux respectifs de [FB] et [FG] la droite (BG) est parallèle à la droite (IL).

M étant le milieu de [EH] la droite (GM) est parallèle à la droite (LE).

N étant le milieu de [EA] la droite (MN) est parallèle à la droite (LI).

La section est donc le quadrilatère (BGMN) et (MN) étant parallèle à (BG) ce quadrilatère est un trapèze.

Annexe 1 de l'exercice 2 à rendre avec la copie



Annexe 2 de l'exercice 4 : Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie