Math93.com

Baccalauréat 2019 - S
Correction Centres Étrangers et Pondichéry

Série S Obligatoire et spécialité

Juin 2019

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque

Dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

Exercice 1. QCM : Probabilités — 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Question 1 (Réponse D)

Un client sur 4 pratique le surf. Dans une télécabine accueillant 80 clients, la probabilité arrondie au millième qu'il y ait exactement 20 clients pratiquant le surf est :

a. 0,560 **b.** 0,25 **c.** 1 $\boxed{\textbf{d.}\ 0{,}103}$

Preuve

Modélisation

Il y a répétition de $n = 80$ événements indépendants et identiques (on tire un client).
Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

- succès de probabilité $p = 0,25$ quand un client pratique le surf ;
- et échec de probabilité $1 - p = 0,75$ sinon.

Donc la variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 80$ épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0,25$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n = 80$ et $p = 0,25$.
On peut écrire :

$$X \text{ suit } \mathscr{B}\left(80\ ;\ 0,25\right) \text{ ou } X \sim \mathscr{B}\left(80\ ;\ 0,25\right).$$

Preuve

Puisque X suit une loi Binomiale de paramètre $n = 80$ et $p = 0,25$ on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{80}{k} \times 0,25^k \times (0,75)^{80-k}$$

Et donc

$$p(X = 20) = \binom{80}{20} \times 0,25^{20} \times 0,75^{60}$$

Soit :

$$\boxed{p(X = 20) \approx 0.103}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.binomDdP* $(80\ ,\ 0,25\ ,\ 20) \approx 0,103$
- *Sur TI82/83+ : Menu Distrib* $\Rightarrow$ *binomFdp* $(80\ ,\ 0,25\ ,\ 20) \approx 0,103$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu Opt/STAT/DIST/DINM* $\Rightarrow$ *binomialPD* $(20\ ,\ 80\ ,\ 0,25) \approx 0,103$

Question 2 (Réponse D)

X suit une loi normale de moyenne 150 cm et d'écart-type inconnu. On sait que $P(X \geq 200) = 0,025$. Quelle est la probabilité $P(X \geq 100)$.

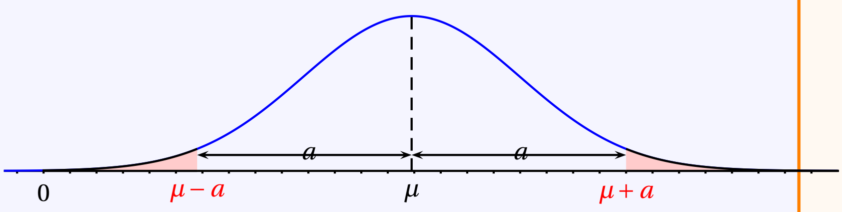
a. On ne peut répondre **b.** 0,025 **c.** 0,95 $\boxed{\textbf{d.}\ 9,975}$

Preuve

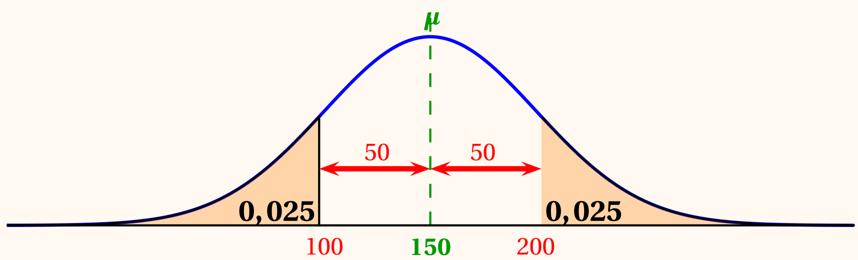
Propriété 1

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$.
Alors par symétrie on a

$$P(X \geq \mu + a) = P(X \leq \mu - a)$$



Donc ici on a :



$$P(X \leq 100) = 0,025 = P(X \geq 200)$$

Et de ce fait :

$$P(X \geq 100) = 1 - P(X \leq 100) = 1 - 0,025 = \underline{0,975}$$

Question 3 (Réponse C)

T suit une loi exponentielle avec $E(T) = 5$. Quelle est la probabilité $P(T \geq 5)$ est :

a. 0,5 **b.** $1 - \mathrm{e}^{-1}$ $\boxed{\textbf{c.}\ \mathrm{e}^{-1}}$ **d.** e^{-25}

Preuve

Propriété 2

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leq a \leq b$:

$$P(a \leq T \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P(T \leq b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geq a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

En outre la variable T est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Donc ici :

$$E(T) = 5 = \frac{1}{\lambda} \iff \lambda = 0,2$$

Et donc

$$P(T \geq 5) = \mathrm{e}^{-\lambda a} = \mathrm{e}^{-0,2\times 5} = \underline{\mathrm{e}^{-1}}$$

Question 4 (Réponse B)

Un intervalle de confiance de longueur 0,04 avec un niveau de confiance de 0,95 correspond à un nombre de clients de :

a. 50 $\boxed{\textbf{b.}\ 2\,500}$ **c.** 25 **d.** 625

Preuve

Un intervalle de confiance de longueur 0,04 avec un niveau de confiance de 0,95 est de longueur :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,04 \iff \sqrt{n} = \frac{2}{0,04} = 50 \iff n = 2\,500$$

Exercice 2. Suites — 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Partie A

1. **Vérifier que si $u_1 = 0$ alors $u_4 = -17$.**
   Pour tout entier n on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = (n+1)\,u_n - 1 \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

   Et donc

$$\begin{cases} u_2 = 2 \times u_1 - 1 = -1 \\ u_3 = 3 \times u_2 - 1 = 3 \times (-1) - 1 = -4 \\ u_4 = 4 \times u_3 - 1 = \underline{-17} \end{cases}$$

2. **Recopier et compléter cet algorithme qui calcule les termes de u_2 à u_{13}.**

Pseudo Code

```
U ⟵ ... # valeur de u1
    Pour N allant de 1 à 12   Faire
        U ⟵ (N+1) × U − 1
    Fin Pour
```

3. **Quelle semble être la limite de la suite ?**
   - Si $u_1 = 0,7$ alors il semblerait que la limite de cette suite soit $-\infty$.
   - Si $u_1 = 0,8$ alors il semblerait que la limite de cette suite soit $+\infty$.

Partie B

1. **Prouver que la fonction F définie $[0\,;\,1]$ sur par $F(x) = (-1-x)\,\mathrm{e}^{1-x}$ est une primitive de f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x}$.**

$$F : \begin{cases} [0\,;\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) = (-1-x) \times \mathrm{e}^{1-x} \end{cases}$$

   La fonction F est dérivable sur $[0\,;\,1]$.
   La fonction F est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,1]\,;\ F(x) = u(x) \times v(x)\ :\ \begin{cases} u(x) = (-1-x) & ; & u'(x) = -1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{1-x} & ; & v'(x) = \left(-\mathrm{e}^{1-x}\right) \end{cases}$$

   On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;\,1],\ F'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ F'(x) &= -1 \times \mathrm{e}^{1-x} + (-1-x) \times \left(-\mathrm{e}^{1-x}\right) \\ F'(x) &= \mathrm{e}^{1-x} \times \Big(-1+1+x\Big) \end{aligned}$$

   Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,1]\,;\ F'(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x}}$$

   Donc F est bien une primitive de f.

2. **En déduire $I_1 = \mathrm{e} - 2$.**

$$I_1 = \int_0^1 x^1\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = -2\,\mathrm{e}^0 - \left(-1\,\mathrm{e}^1\right) = \underline{\mathrm{e} - 2}$$

3. On admet que pour $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$. Calculer I_2.

$$I_2 = 2I_1 - 1 = 2 \times (\mathrm{e} - 2) - 1 = \underline{2\,\mathrm{e} - 5}$$

4.

4. a. Justifier que pour tout réel x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier $n \geq 1$ on a : $0 \leq x^n\,\mathrm{e}^{1-x} \leq x^n\,\mathrm{e}$.

Pour tout réel x de $[0\,;\,1]$ on a :

$$0 \leq x \leq 1 \iff -1 \leq -x \leq 0 \iff 0 \leq 1 - x \leq 1$$

On compose alors par la fonction exponentielle qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$1 = \mathrm{e}^0 \leq \mathrm{e}^{1-x} \leq \mathrm{e}^1$$

On multiplie alors les membres par x^n strictement positif pour pour tout réel x de $]0\,;\,1]$ et pour tout entier $n \geq 1$:

$$x \leq x\,\mathrm{e}^{1-x} \leq x\,\mathrm{e}$$

Par ailleurs, pour $x = 0$ cette inégalité est aussi vérifiée, donc on a démontré que pour tout réel x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier $n \geq 1$ on a :

$$\boxed{0 \leq x^n\,\mathrm{e}^{1-x} \leq x^n\,\mathrm{e}}$$

4. b. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

Pour $n \geq 1$ et x de $[0\,;\,1]$, une primitive de la fonction $x \longmapsto x^n$ est $x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. De ce fait pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
&= \mathrm{e}\left(\frac{1^{n+1}}{n+1} - 0\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1}}$$

4. c. En déduire que, pour $n \geq 1$ on a : $0 \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

Pour tout réel x de $[0\,;\,1]$ et pour tout entier $n \geq 1$ on a montré lors de la question (B.4.a) que :

$$0 \leq x^n\,\mathrm{e}^{1-x} \leq x^n\,\mathrm{e}$$

On intègre sur l'intervalle $[0;1]$ l'inégalité :

$$0 \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}\,\mathrm{d}x$$

Puis en utilisant le résultat de la question (B.4.b) :

$$\boxed{0 \leq \underbrace{\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x}_{I_n} \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1}}$$

4. d. Déterminer la limite de (I_n).

On a :

$$\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0 \\
0 \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}
\end{array}\right. \;\Bigg|\; \underset{\text{Par théorème d'encadrement}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

Partie C

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = n!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n$.
Notons pour tout entier naturel $n \geq 1$ le postulat

$$(P_n)\ :\ u_n = n!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n$$

- **Initialisation**
Pour $n = 1$, le postulat (P_1) est vrai puisque pour $n = 1$, en appliquant le résultat de la question (B.2.) $I_1 = \mathrm{e} - 2$:

$$\begin{aligned} n!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n &= 1!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_1 \\ &= u_1 - \mathrm{e} + 2 + \mathrm{e} - 2 \\ &= u_1 \end{aligned}$$

- **Hérédité**
Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$. Pour $n \geq 1$ on a d'après la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = (n+1)\,u_n - 1$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que

$$u_n = n!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n$$

Pour $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)\left(n!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n\right) - 1 \\ &= \underbrace{(n+1)\,n!}_{(n+1)!}(u_1 - \mathrm{e} + 2) + (n+1)I_n - 1 \\ &= (n+1)!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + \underbrace{(n+1)I_n - 1}_{I_{n+1}} \end{aligned}$$

On a alors montré que $u_{n+1} = (n+1)!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_{n+1}$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**
On a montré que (P_1) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{u_n = n!\,(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n}$$

2. *On admet que* $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$.

2. a. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,7$.
Pour $u_1 = 0,7$ on a :

$$u_1 - \mathrm{e} + 2 \approx -0,018 < 0$$

Et de ce fait :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty \\ u_1 - \mathrm{e} + 2 \approx -0,018 < 0 \end{array}\right| \underset{\text{Par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n \to +\infty} n! \times (u_1 - \mathrm{e} + 2) = -\infty$$

Or on a calculé la limite de (I_n) lors de la question (B.4.d) donc

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} n! \times (u_1 - \mathrm{e} + 2) = -\infty \\ \lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0 \end{array}\right| \underset{\text{Par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{n! \times (u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n}_{u_n} = -\infty}$$

2. b. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque $u_1 = 0,8$.
Pour $u_1 = 0,8$ on a :

$$u_1 - \mathrm{e} + 2 \approx 0,082 > 0$$

Et de ce fait :

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty \\ u_1 - \mathrm{e} + 2 \approx 0,082 > 0 \end{array}\right| \underset{\text{Par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to+\infty} n! \times (u_1 - \mathrm{e} + 2) = +\infty$$

Or on a calculé la limite de (I_n) lors de la question (B.4.d) donc

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n! \times (u_1 - \mathrm{e} + 2) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0 \end{array}\right| \underset{\text{Par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{n! \times (u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n}_{u_n} = +\infty}$$

Exercice 3. Complexes — 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s
Le point A est d'affixe 1.

Partie A : étude d'exemples

1. Un premier exemple.
Dans cette question on pose : $z = i$.

1. a. Donner la forme algébrique des complexes z^2 et $\dfrac{1}{z}$.

$$z^2 = \mathrm{i}^2 = \underline{-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}} \times \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{-1} = \underline{-\mathrm{i}}$$

1. b. Placer les points $N_1\left(z^2\right)$ et $P_1\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

2. Une équation
Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.
Dans cette équation du second degré on a :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2$$

L'équation admet donc deux complexes conjugués :

$$\boxed{z_1 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{z_1} = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}$$

3. Un deuxième exemple
Dans cette question on pose : $z = -\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. a. Donner la forme exponentielle des complexes z, z^2 et $\dfrac{1}{z}$.
On a :

$$|z| = \left|-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\arg(z) = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\arg(z) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}}$$

De ce fait :

$$\left\{\begin{array}{l} z^2 = \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\right)^2 = \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/3} \Longrightarrow \boxed{z = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3}} \\ \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{1}{z} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3} = z^2} \end{array}\right.$$

3. b. Placer les points $N_2\left(z^2\right)$ et $P_2\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Partie B : étude du cas général

On note $N\left(z^2\right)$ *et* $P\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

1. **Établir que pour tout complexe z différent de 0 on a : $z^2-\dfrac{1}{z}=(z^2+z+1)\left(1-\dfrac{1}{z}\right)$.**

   Pour tout complexe z différent de 0 :

$$\begin{aligned}(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right)&=z^2-z+z-1+1-\frac{1}{z}\\&=z^2-\frac{1}{z}\end{aligned}$$

$$\boxed{z^2-\frac{1}{z}=(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$

2. **Montrer que pour $z\neq 0$, les points A, N et P sont alignés si et seulement si z^2+z+1 est réel.**

   On a pour $z\neq 0$:

$$\overrightarrow{PN}\left(z^2-\frac{1}{z}\right)\quad\text{et}\quad\overrightarrow{PA}\left(1-\frac{1}{z}\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PN}\left(z^2-\frac{1}{z}\right)\text{colinéaire à }\overrightarrow{PA}\left(1-\frac{1}{z}\right)&\iff\Big(z=1\Big)\text{ ou }\left(z\neq 1\text{ et il existe }k\text{ tel que : }z^2-\frac{1}{z}=k\left(1-\frac{1}{z}\right)\right)\\&\iff\Big(z=1\Big)\text{ ou }\left(z\neq 1\text{ et }(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right)=k\left(1-\frac{1}{z}\right)\text{ d'après la question (B.1.)}\right)\\&\iff\Big(z=1\Big)\text{ ou }\left(z\neq 1\text{ et }(z^2+z+1-k)\left(1-\frac{1}{z}\right)=0\right)\\&\iff\Big(z=1\Big)\text{ ou }\Big(z\neq 1\text{ et }(z^2+z+1)=k\Big)\\&\iff\Big(z=1\Big)\text{ ou }\Big(z\neq 1\text{ et }(z^2+z+1)\in\mathbb{R}\Big)\end{aligned}$$

   Or si $z=1$, alors $z^2+z+1=3$ est bien réel donc on a donc bien démontré que pour $z\neq 0$, les points A, N et P sont alignés si et seulement si z^2+z+1 est réel.

3. **On pose $z=x+\mathrm{i}\,y$. Justifier que : $z^2+z+1=x^2-y^2+x+1+\mathrm{i}\,(2xy+y)$.**

$$\begin{aligned}z^2+z+1&=(x+\mathrm{i}y)^2+x+\mathrm{i}y+1\\&=x^2+2\mathrm{i}xy-y^2+x+\mathrm{i}y+1\\&=\underline{x^2-y^2+x+1+\mathrm{i}(2xy+y)}\end{aligned}$$

4.

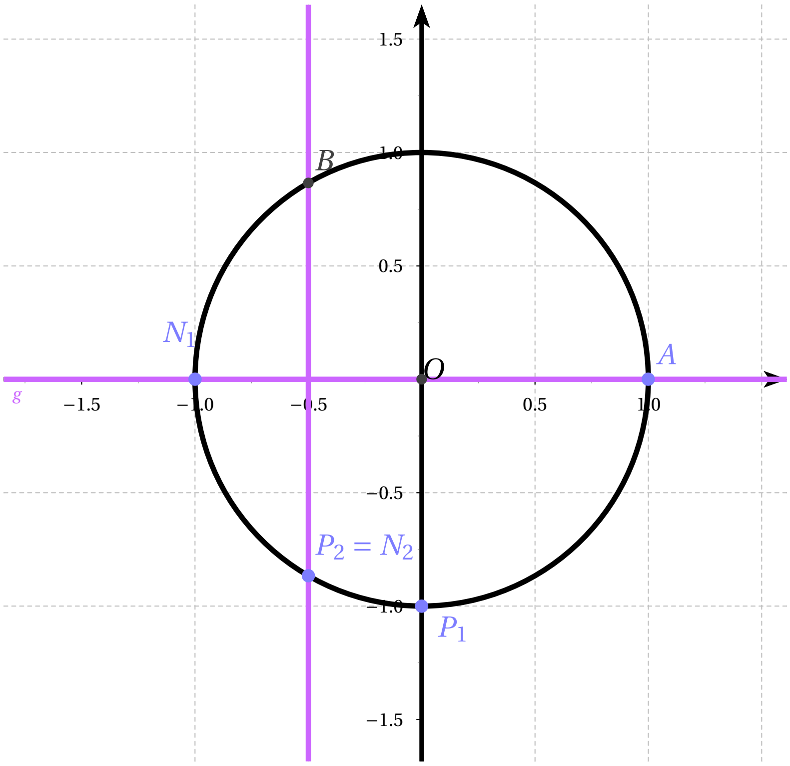
   4. a. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ avec $z\neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.

   On a montré à la question (B.2.) que pour $z\neq 0$, les points A, N et P sont alignés si et seulement si z^2+z+1 est réel. Or d'après la question (B.3.) $z^2+z+1=x^2-y^2+x+1+\mathrm{i}\,(2xy+y)$ de ce fait :

$$\begin{aligned}z^2+z+1\in\mathbb{R}&\iff x^2-y^2+x+1+\mathrm{i}\,(2xy+y)\in\mathbb{R}\\&\iff 2xy+y=0\\&\iff y(2x+1)=0\\&\iff\boxed{y=0\text{ ou }x=-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

   Les solutions appartiennent donc aux droites d'équation $y=0$ et $x=-\dfrac{1}{2}$.
   Il faut alors exclure le point solution correspondant à $z=0$.
   Conclusion : l'ensemble cherché est la réunion des droites d'équation $y=0$ et $x=-0,5$ privé du point O.

4. b. Tracer cet ensemble.



Exercice 4. Obligatoire : Espace 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité *Dans l'espace, on considère un cube ABCDEFGH de centre* Ω *et d'arête de longueur 6. Les points P, Q et R sont définis par :*

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\quad et\quad \overrightarrow{HR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$. *Dans ce repère, on a par exemple :* $B(6\,;\,0\,;\,0)$; $F(6\,;\,0\,;\,6)$; $R(0\,;\,4\,;\,6)$.

1.

1. a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.

$$\boxed{P(2\,;\,0\,;\,0)\,;\,Q(0\,;\,0\,;\,2)\,;\,\Omega(3\,;\,3\,;\,3)}$$

1. b. Déterminer les nombres réels b et c tels que $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,b\,;\,c)$ soit normal à (PQR).

On utilise le fait que pour que $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,b\,;\,c)$ soit normal au plan (PQR) il doit être orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$$\begin{cases} P(2\,;\,0\,;\,0)\\ Q(0\,;\,0\,;\,2)\\ R(0\,;\,4\,;\,6)\end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\,;\,\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}=0 \iff -2+2c=0 \iff \underline{c=1}\\ \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}=0 \iff -2+4b+6c=0 \iff \underline{b=-1}\end{cases}$$

1. c. En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x-z+z-2=0$.

Propriété 3

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{u}=0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}.\,\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \iff a\,(x-x_A)+b\left(y-y_A\right)+c\,(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 3 :

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(PQR) \iff \overrightarrow{RM}\begin{pmatrix}x-0\\y-4\\z-6\end{pmatrix}.\,\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(PQR) \iff x-(y-4)+(z-6)=0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(PQR) \iff x-y+z-2=0$$

$$\boxed{(PQR)\ :\ x-y+z-2=0}$$

2.

2. a. On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω(3 ; 3 ; 3), centre du cube. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ passant par Ω(3 ; 3 ; 3). Une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\boxed{\begin{cases} x = t+3 \\ y = -t+3 \\ z = t+3 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}}$$

2. b. En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $I\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$.

Par définition, le plan (PQR) et la droite Δ sont sécants.

$$\begin{cases} x-y+z-2=0 \\ x=t+3 \\ y=-t+3 \\ z=t+3 \end{cases} \iff \begin{cases} t+3-(-t+3)+(t+3)-2=0 \\ x=t+3 \\ y=-t+3 \\ z=t+3 \end{cases} \iff \begin{cases} t=-\dfrac{1}{3} \\ x=-\dfrac{1}{3}+3=\dfrac{8}{3} \\ y=\dfrac{10}{3} \\ z=-\dfrac{1}{3}+3=\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\boxed{I\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{10}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)}$.

2. c. Calculer la distance ΩI .

On est dans un repère orthonormé donc :

$$\Omega I^2 = \left(\frac{8}{3}-3\right)^2 + \left(\frac{10}{3}-3\right)^2 + \left(\frac{8}{3}-3\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\Omega I = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

3. *On considère les points $J(6\,;\,4\,;\,0)$ et $K(6\,;\,6\,;\,2)$.*

3. a. Justifier que le point J appartient au plan (PQR) .

Les coordonnées de J vérifient l'équation de (PQR) : $x-y+z-2=0$ donc J appartient au plan (PQR).

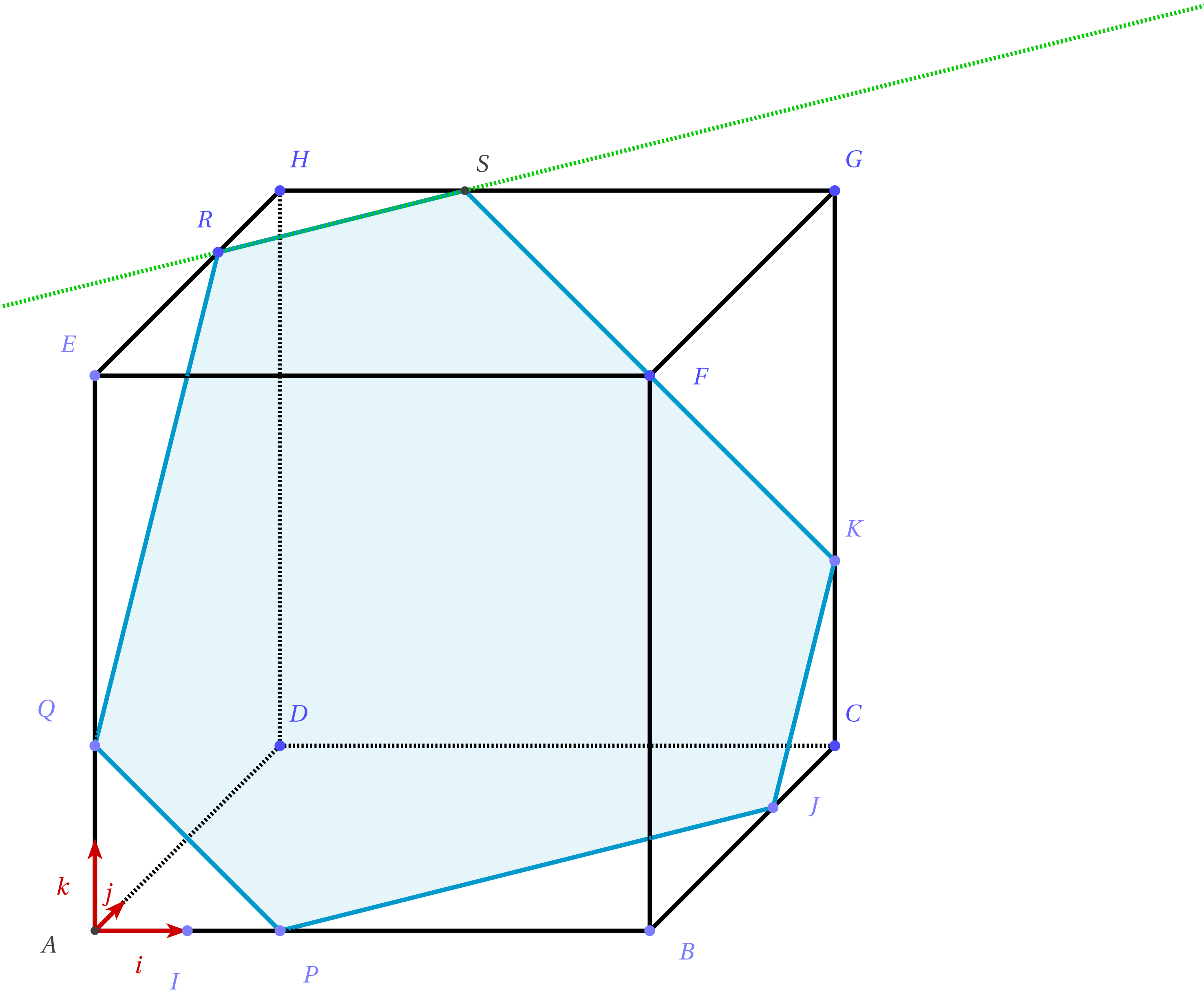
3. b. Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

$$\begin{cases} J(6\,;\,4\,;\,0) \\ K(6\,;\,6\,;\,2) \\ Q(0\,;\,0\,;\,2) \\ R(0\,;\,4\,;\,6) \end{cases} \implies \overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs sont colinéaires puisque $\overrightarrow{QR} = 2\overrightarrow{JK}$. Les droites (JK) et (QR) sont donc parallèles.

3. c. Sur la figure donnée en annexe, page 7/8, tracer la section du cube par le plan (PQR) . On laissera apparents les traits de construction, ou bien on expliquera la démarche.

- On place le point J(6 ; 4 ; 0) .
- On trace la parallèle à la droite (QR) passant par J. Elle coupe la droite (GC) en K.
- On trace la parallèle à la droite (PJ) passant par R. Elle coupe la droite (HG) en S.



Exercice 5. Spécialité : Arithmétique — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Les questions 1., 2. *et* 3. *sont indépendantes*

1. **Sans justifier, donner deux nombres premiers x, et y tels que $40 = x + y$.**
Les douze nombres premiers inférieurs à 40 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. On a donc par exemple (un couple suffisait) :
$$\boxed{40 = 3+37 \text{ ou } 40 = 11+29}$$

2. **On considère l'équation $20x + 19y = 40$, où x et y désignent deux, entiers relatifs. Résoudre cette équation.**

Théorème 1 (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)

Soit a, b, c des entiers.

Si $\begin{cases} a \text{ divise le produit } bc \\ a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux} \end{cases}$, alors a divise c.

Remarque : Le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss énonce et prouve ce théorème (sous forme de lemme en fait) en 1801 dans son ouvrage « *Disquisitiones arithmeticae* ».

Déterminer les solutions de l'équation (E') : $20u + 19v = 40$.

- **Recherche d'une solution particulière**
Puisque $(1\ ;\ -1)$ est une solution particulière de l'équation
$$(E)\ :\ 20u + 19v = 1$$
Alors
$$20 \times 1 + 19 \times (-1) = 1$$
En multipliant les deux membres de l'égalité par 40 on obtient :
$$20 \times 1 \times 40 + 19 \times (-1) \times 40 = 40$$
Et donc
$$20 \times 40 + 19 \times (-40) = 40$$
Ainsi $\underline{(40\ ;\ -40)}$ est une solution particulière de l'équation $\underline{(E')\ :\ 20u + 19v = 40}$.

- **Solutions générales**
On utilise la même méthode :
  - **Transformation de l'équation**
$$(E')\ :\ 20u + 19v = 40$$
Puisque le couple $(40\ ;\ -40)$ est une solution particulière de l'équation (E') on a : $20 \times 40 + 19 \times (-40) = 40$.
Donc
$$\begin{cases} 20 \times u & + & 19 \times v & = 40 \\ 20 \times 40 & + & 19 \times (-40) & = 40 \end{cases} \underset{\text{par soustraction}}{\Longrightarrow} 20(u-40) + 19(v+40) = 0$$
Donc l'équation (E') devient :
$$(E')\ :\ 20(u-40) = 19(-v-40)$$

– **Application du théorème de Gauss**

$$\left(E'\right) : 20(u-40)=19(-v-40)$$

Puisque 20 et 19 sont premiers entre eux, alors en appliquant le théorème de Gauss :

$$\begin{cases}\text{20 divise le produit } 19\times(-v-40)\\ \text{20 et 19 sont premiers entre eux}\end{cases} \underset{\text{d'après le th. de Gauss}}{\Longrightarrow} \text{20 divise } (-v-40)$$

$$\begin{cases}\text{19 divise le produit } 20\times(u-40)\\ \text{20 et 19 sont premiers entre eux}\end{cases} \underset{\text{d'après le th. de Gauss}}{\Longrightarrow} \text{19 divise } (u-40)$$

Il existe donc des entiers k et k' tels que :

$$\begin{cases}(-v-40) & =20k\\ (u-40) & =19k'\end{cases}$$

En reportant dans l'équation $\left(E'\right)$ on obtient

$$20\times 19k' = 19\times 20k \Longleftrightarrow k=k'$$

Ainsi, les solutions de l'équation $\left(E'\right)$ sont les couples de la forme

$$\boxed{(40+19k\ ;\ -40-20k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}}$$

3. *Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque* $40=2^2+6^2$ *. On veut savoir si 40 est aussi différence de deux carrés, autrement dit on s'intéresse à l'équation* $x^2-y^2=40$ *, où x et y désignent deux entiers naturels.*

3. a. Donner la décomposition de 40 en produit de facteurs premiers.

$$40=2^2\times 10=\underline{2^3\times 5}$$

3. b. Montrer que, si x et y désignent des entiers naturels, les nombres $x-y$ et $x+y$ ont la même parité.

On suppose que x et y désignent des entiers naturels avec $x\geq y$.

- Si $(x-y)$ est pair alors il existe un entier naturel k tel que :

$$(x-y)=2k \Longrightarrow x=y+2k$$

De ce fait

$$x+y=y+2k+y=2y+2k=2\underbrace{(y+k)}_{\in\mathbb{N}}$$

Et donc $(x+y)$ est aussi pair.

- Si $(x-y)$ est impair alors il existe un entier naturel k' tel que :

$$(x-y)=2k'+1 \Longrightarrow x=y+2k'+1$$

De ce fait

$$x+y=y+2k'+1+y=2y+2k'+1=2\underbrace{(y+k')}_{\in\mathbb{N}}+1$$

Et donc $(x+y)$ est aussi impair.

3. c. Déterminer toutes les solutions de l'équation $x^2-y^2=40$ où x et y désignent deux entiers naturels.

$$x^2-y^2=40 \iff (x-y)(x+y)=2^3\times 5$$

- La décomposition obtenue lors de la question (A3a) nous permet d'obtenir les 4 décomposition de 40 en produit de deux entiers.

$$40=1\times 40=2\times 20=4\times 10=8\times 5$$

- Par ailleurs, on a montré en (A3b) que les entiers $(x-y)$ et $(x+y)$ ont la même parité. Cela exclu les décompositions 1×40 et 8×5 .
- Puisque $(x+y)$ est positif, nécessairement $(x-y)$ doit l'être aussi pour que l'égalité soit vérifiée. x et y étant positifs, on a nécessairement $x+y\geq x-y$ et les solutions possibles sont donc :

$$\begin{cases}x+y=20\\ x-y=2\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x+y=10\\ x-y=4\end{cases} \iff \boxed{\begin{cases}x=11\\ y=9\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=7\\ y=3\end{cases}}$$

Partie B : « sommes » de cubes

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels. Par exemple :

$$13 = 4^3 + 7^3 + 7^3 - 9^3 - 2^3,\ 13 = -1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 2^3\ ,\ 13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$$

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « sommes » de cubes à la place de « sommes ou différence de cubes d'entiers naturels ». Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en « somme » de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en « somme » de 4 cubes.

1.

1. a. En utilisant l'égalité $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$, donner une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes.

$$\begin{cases} 13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3 \\ 40 = 13 + 27 = 13 + 3^3 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{40 = 1^3 + 3^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3}$$

1. b. On admet que pour tout entier naturel n on a : $6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3$. En déduire une décomposition de 48 en « somme » de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes, différente de celle donnée en 1. a.)

- 48 en « somme » de 4 cubes :
  On va appliquer l'égalité admise avec $n = 8$ soit $6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3$:

$$\begin{aligned} 48 &= 6 \times 8 \\ &= (8+1)^3 + (8-1)^3 - 8^3 - 8^3 \\ 48 &= \underline{9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3} \end{aligned}$$

- 40 en « somme » de 5 cubes :

$$\begin{cases} 48 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3 \\ 40 = 48 - 8 = 48 - 2^2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{40 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 2^3 - 8^3}$$

2. Le nombre 40 est une « somme » de 4 cubes : $40 = 4^3 - 2^3 - 2^3 - 2^3$. On veut savoir si 40 peut être décomposé en « somme »de 3 cubes.

2. a. Recopier et compléter sans justifier :

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

2. b. On déduit du tableau précédent que, pour tout entier naturel n, l'entier naturel n^3 est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à -1. Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en « somme »de 3 cubes.

- On a $8 \equiv -1\ [9]$ donc, pour tout entier naturel n on a n^3 est congru modulo 9, soit à 0, soit à 1 soit à -1.
- De ce fait, la somme de 3 cubes est congrue modulo 9, dans :

$$\{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$$

- Or 40 est congru à 4 modulo 9, $40 \equiv 4\ [9]$ ce qui est contradictoire si on admet une telle décomposition.
- Conclusion : 40 ne peut pas être décomposé en « somme »de 3 cubes.

Fin du devoir