Math93.com

# Baccalauréat 2018 - S
# Correction Amérique Nord

### Série S Obli. et Spé.

### 29 Mai 2018

---

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

**Remarque** : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

## Exercice 1. Probabilités — 6 points

**Commun à tous les candidats**

### Partie A - Démonstration préliminaire

*Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,2$. On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire $X$, notée $E(X)$, est égale à : $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x 0,2te^{-0,2t}\,dt$. Le but de cette partie est de démontrer que $E(X)=5$.*

1. **On note $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t)=0,2te^{-0,2t}$. On définit la fonction $G$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $G(t)=(-t-5)e^{-0,2t}$. Vérifier que $G$ est une primitive de $g$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.**

$$G:\left\{\begin{array}{rcl}[0\,;\,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & G(x)=(-t-5)\times \mathrm{e}^{-0,2t}\end{array}\right.$$

La fonction $G$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction $G$ est de la forme $uv$ donc de dérivée $u'v+uv'$ avec :

$$\forall t\in[0\,;\,+\infty[\,;\ G(t)=u(t)\times v(t)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl}u(t)=(-t-5) & ; & u'(t)=-1\\ v(t)=\mathrm{e}^{-0,2t} & ; & v'(t)=(-0,2)\,\mathrm{e}^{-0,2t}\end{array}\right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\forall t\in[0\,;\,+\infty[,\ \ G'(t)&=u'(t)\times v(t)+u(t)\times v'(t)\\ G'(t)&=-1\times\mathrm{e}^{-0,2t}+(-t-5)\times(-0,2)\,\mathrm{e}^{-0,2t}\\ G'(t)&=\mathrm{e}^{-0,2t}\times\Big(-1+0,2t+1\Big)\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall t\in[0\,;\,+\infty[\,;\ G'(t)=0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}=g(t)}$$

$G$ est bien une primitive de $g$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. **En déduire que la valeur exacte de $E(X)$ est 5.**
***Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-0,2x}=0$.***

- Calcul de l'intégrale.
Pour tout réel $x$ positif on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x 0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}\,\mathrm{d}t&=G(x)-G(0)\\ &=(-x-5)\mathrm{e}^{-0,2x}-(-0-5)\mathrm{e}^0\\ &=\underline{-(x+5)\mathrm{e}^{-0,2x}+5}\end{aligned}$$

- Calcul de la limite.
  On a montré que :

$$\int_0^x 0,2te^{-0,2t}\,\mathrm{d}t = -xe^{-0,2x} - 5e^{-0,2x} + 5$$

Or :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -0,2x = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} e^{-0,2x} = 0$$

Et donc

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-0,2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,2x} = 0 \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \left(-xe^{-0,2x} - 5e^{-0,2x} + 5\right) = 5$$

Donc

$$\boxed{E(X) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x 0,2te^{-0,2t}\,\mathrm{d}t = 5}$$

## Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

*Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire $T$. Cette variable $T$ suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté $\sigma$. Grâce à cette étude, on estime que $P(T < 10) = 0,067$.*

1. **Déterminer une valeur arrondie du réel $\sigma$ à la seconde près.**

**Propriété 1**

Soit $\mu$ un réel et $\sigma$ un réel strictement positif.
La variable aléatoire $T$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Z = \dfrac{T-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

$$\begin{aligned} P(T<10) = 0,067 &\Longleftrightarrow P(T-40 < -30) = 0,067 \\ &\Longleftrightarrow P\left(\frac{T-40}{\sigma} < -\frac{30}{\sigma}\right) = 0,067 \\ &\Longleftrightarrow P\left(Z < -\frac{30}{\sigma}\right) = 0,067 \end{aligned}$$

On cherche $u$ tel que $P(Z \leq u) = 0,067$ où $Z$ suit une loi normale $\mathcal{N}\left(0\,;\,1^2\right)$, une loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 1$ . La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à $10^{-4}$ près :

$$P(Z \leq u) = 0,067 \Longleftrightarrow u \approx \underline{-1,4985}$$

Et donc

$$\frac{-30}{\sigma} \approx -1.498513 \Longrightarrow \underline{\sigma \approx 20.0198\,\text{min} \approx 20\,\text{min}\,1\,\text{s}}$$

*Calculatrices*

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0.067\,,\,0\,,\,1) \approx \underline{-1,498\,513\,068}$
- *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0.067\,,\,0\,,\,1)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0.067\,,\,0\,,\,1)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0.067\,,\,1\,,\,0)$

**2. Dans cette question, on prend $\sigma = 20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?**
On veut calculer la probabilité $P(T > 60)$ or

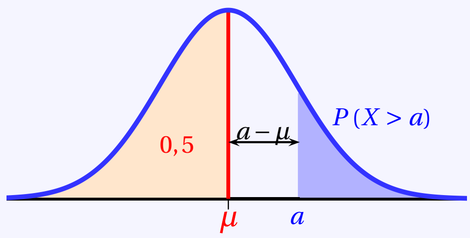
**Propriété 2** $(P(X > a)\ ;\ a > \mu)$

Si la variable $X$ suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0,5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel $a$ avec $a > \mu$ :

$$\boxed{P(X > a) = 0,5 - P\left(\mu < X < a\right)}$$




$$P(T > 60) = 0,5 - P(40 < T < 60) \approx \underline{0,159}$$

*Calculatrices*

- *Sur la TI Voyage 200 :* $\left(0,5-\ \textit{TIStat.normFDR}(40\ ,\ 60\ ,\ 40\ ,\ 20)\right) \approx \underline{0,158\,655}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*(40 , 60 , 40 , 20) *ou (fr.) normalfrép*(40 , 60 , 40 , 20)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*(40 , 60, 20 , 40 )

## Partie C - Durée d'attente pour le paiement

*Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.*

**1.** *La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre* $0,2$ *min*$^{-1}$.

**1. a. Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.**
La durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement est donnée par l'espérance de la variable qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,2\ \text{min}^{-1}$. On a donc une durée moyenne d'attente de :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,2\,\text{min}^{-1}} = \underline{5\,\text{min}}$$

**1. b. Calculer la probabilité, arrondie à $10^{-3}$, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.**

**Propriété 3**

Soit $\lambda$ un réel strictement positif.
Si $T$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ alors pour tout réel $a$ et $b$ tels que $0 \leq a \leq b$ :

$$P(a \leq T \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P(T \leq b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geq a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

En outre la variable $T$ est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

La probabilité, arrondie à $10^{-3}$, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes est :

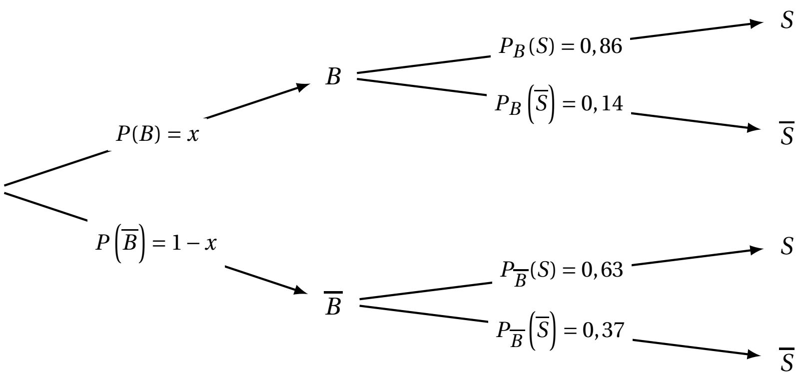
$$P(T' > 10) = \mathrm{e}^{-10\lambda} = \underline{\mathrm{e}^{-2} \approx 0,135}$$

2. *L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante : parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de* 10 *minutes ; parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de la minutes. On choisit un client du magasin au hasard et on définit les évènements suivants : $B$ : « le client paye à une borne automatique » ; $\overline{B}$ : « le client paye à une caisse avec opérateur » ; $S$ : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à la minutes ».*

 **Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de la minutes.**

 **Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?**

 On résume les données dans un arbre :




 On cherche donc $x$ pour que $P(S) > 0,75$ soit d'après la formule de s probabilités totale :

$$\begin{aligned} p(S) > 0,75 &\iff p(S \cap B) + p\left(S \cap \overline{B}\right) > 0,75 \\ &\iff 0,86x + 0,63(1-x) > 0,75 \\ &\iff 0,23x > 0,12 \\ &\iff x > \frac{12}{23} \end{aligned}$$

 La proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint est donc $\frac{12}{23} \approx 52\%$.

## Partie D - Bons d'achat

*Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de* 10 € *d'achats. Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, alors le client obtient* 5 *cartes ; si le montant est 124,31 €, le client obtient* 12 *cartes. Les cartes gagnantes représentent* 0,5 % *de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.*

1. **Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €. Quelle est la probabilité, arrondie à $10^{-2}$, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?**

 Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €. Or chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 € d'achats, de ce fait pour 158,02 €il obtient <u>15 cartes</u>.
 Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes et ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise. De ce fait si on note $J$ la variable aléatoire qui compte le nombre de cartes gagnantes.

 **Modélisation**
 Il y a répétition de $n = 15$ événements indépendants et identiques (on tire une carte).
 Chaque tirage a deux issues possibles (épreuve de Bernoulli) :

 - succès de probabilité $p = 0,005$ quand une carte est gagnante ;
 - et échec de probabilité $1 - p = 0,995$ sinon.

 Donc la variable aléatoire $J$ qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n = 15$ épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0,005$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n = 15$ et $p = 0,005$.
 On peut écrire :

$$J \text{ suit } \mathscr{B}\Big(15\ ;\ 0,005\Big) \text{ ou } X \sim \mathscr{B}\Big(15\ ;\ 0,005\Big).$$

la probabilité, arrondie à $10^{-2}$, qu'il obtienne au moins une carte gagnante est alors :

$$P\left(J \geq 1\right) = 1 - P(J = 0) = \underline{1 - 0,995^{15} \approx 0,07}$$

**2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 €, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?**

De la même façon, notons $J_n$ la variable aléatoire qui compte le nombre de cartes gagnantes pour une répétition de $n$ tirages. La variable aléatoire $J_n$ qui est égale au nombre de succès au cours de ces $n$ épreuves *indépendantes* de *Bernoulli* de paramètre $p = 0,005$ suit une *loi binomiale* de paramètres $n$ et $p = 0,005$.
On a alors :

$$\begin{aligned} P\left(J_n \geq\right) > 0,5 &\iff 1 - 0,995^n > 0,5 \\ &\iff 0,995^n < 0,5 \end{aligned}$$

On compose par la fonction ln qui est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, l'ordre est inchangé :

$$\begin{aligned} P\left(J_n \geq\right) > 0,5 &\iff \ln 0,995^n < \ln 0,5 = -\ln 2 \\ P\left(J_n \geq\right) > 0,5 &\iff n \ln 0,995 < -\ln 2 \end{aligned}$$

On divise les deux membres par $\ln 0,995 < 0$, l'ordre change

$$P\left(J_n \geq\right) > 0,5 \iff n > \frac{-\ln 2}{\ln 0,995} \approx 138.28$$

Or $n$ étant entier, il faut que $n$ soit supérieur ou égal à 139.
Cela implique que le nombre de cartes doit être au moins égal à 139 ce qui correspond à un achat <u>supérieur strictement à 1 390 euros</u>.

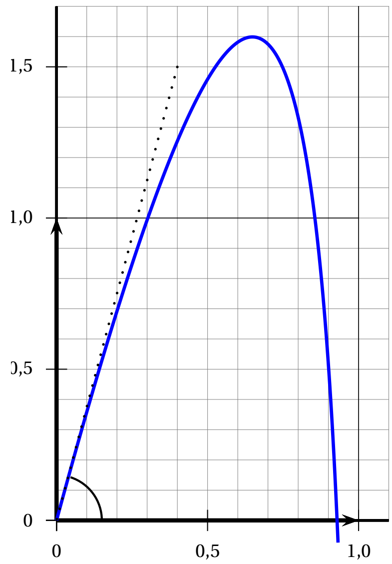
## Exercice 2. Fonction — 4 points

**Commun à tous les candidats**

*Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir $\theta$ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre. Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté. On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;1[$ par :*

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

*où $b$ est un paramètre réel supérieur ou égal à $2$, $x$ est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.*




**1. La fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $[0;1[$. On note $f'$ sa fonction dérivée. On admet que la fonction $f$ possède un maximum sur l'intervalle $[0;1[$ et que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0;1[$ : $f'(x) = \dfrac{-bx+b-2}{1-x}$.**

**Montrer que le maximum de la fonction $f$ est égal à $b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.**

- Maximum sur l'intervalle ouvert.
  Si on admet donc que le maximum de la fonction $f$, continue et dérivable sur $[0\,;\,1[$, est atteint pour $x$ de $[0\,;\,1[$, alors ce ne peut pas être en 0. En effet, $f(0)=0$ et pour $x \in [0\,;\,1[$ on a puisque $b \geq 2$ :

$$\begin{cases} bx \geq 0 \\ 2\ln(1-x) \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f(x) \geq 0$$

  On peut donc affirmer que $f$ possède un maximum sur l'intervalle ouvert $]0;1[$.

- Lien avec la dérivée.
  $f$ possède un maximum sur l'intervalle ouvert $]0;1[$ et donc, ce maximum est atteint pour un zéro de la dérivée. Or on a pour $x$ de $[0\,;\,1[$ et $b \geq 2$ :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \frac{-bx+b-2}{1-x} = 0 \\ &\iff -bx+b-2 = 0 \text{ et } x \in [0\,;\,1[ \\ &\iff -bx = 2-b \text{ et } x \in [0\,;\,1[ \\ &\iff x = \frac{b-2}{b} \geq 0 \text{ et } \begin{cases} x \in [0\,;\,1[ \\ b \geq 2 \end{cases} \\ &\iff x = 1-\frac{2}{b} \text{ et } \begin{cases} x \in [0\,;\,1[ \\ b \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

  Or puisque $b \geq 2$, on a

$$0 \leq \frac{2}{b} \leq 1$$

  Ce qui implique que :

$$0 \leq 1-\frac{2}{b} \leq 1$$

  De ce fait, on peut affirmer que le maximum est atteint en un réel $x_m = 1-\dfrac{2}{b} \in [0\,;\,1[$ et que ce maximum est :

$$f(x_m) = f\left(1-\frac{2}{b}\right) = b\left(1-\frac{2}{b}\right) + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right) = \underline{b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)}$$

**2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre $b$ la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.**

- Modélisation du problème.
  On cherche pour quelles valeurs du paramètre $b$ la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre ce qui se traduit par :

$$b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right) \leq 1,65$$

  Notons $h$ la fonction définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par :

$$h(b) = b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right) = b - 2 + 2\ln 2 - 2\ln b$$

  La fonction $h$ est définie et dérivable sur $[2\,;\,+\infty[$ et :

$$h'(b) = 1 - \frac{2}{b}$$

  Puisque $b \geq 2$, la dérivée est donc positive et la fonction $h$ croissante sur $[2\,;\,+\infty[$. Par ailleurs on a :

$$h(0) = 0 \;\text{ et }\; h(10) = 8 - 2\ln 5 \approx 4,78 > 1,6$$

| $x$ | $2$ | $\alpha$ | $10$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $h'(b)$ | | $+$ | | |
| $h$ | $0$ | $1.6$ | $\approx 4.78$ | |

**Théorème 1** (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si $f$ est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

***Remarque*** *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- Application du corollaire sur $[2\,;\,10]$ :
  - La fonction $h$ est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[2\,;\,10]$ ;
  - Le réel $k = 1,6$ est compris entre $h(2) = 0$ et $h(10) \approx 4,78$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $h(x) = 1,6$ admet une solution unique $\alpha$ sur l'intervalle $[2\,;\,10]$.
- Valeur approchée .
  Pour avoir un encadrement de $\alpha$, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcr} h(5,69) & \approx & 1,59887 < 1,6 \\ h(5,7) & \approx & 1,605 > 1,6 \end{array}\right|, \text{ donc } 5,69 < \alpha < 5,7.$$

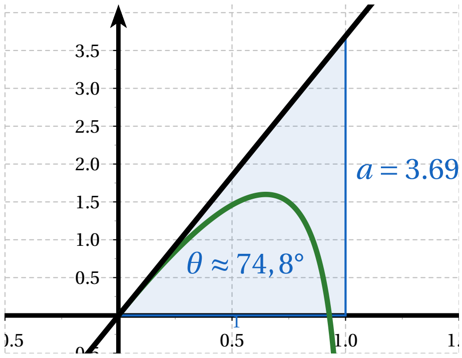
  Une valeur approchée de $\alpha$ à 0.01 près est donc $\underline{\alpha \approx 5,69}$, (on choisit la valeur d'image inférieur à 1,6).
- Conclusion : la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre quand $b$ appartient à l'intervalle $[2\,;\,\alpha]$.

**3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$. L'angle de tir $\theta$ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction $f$ au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus. Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\theta$.**

Pour $b = 5,69$ on a sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ :

$$\begin{cases} f(x) = bx + 2\ln(1-x) \\ f'(x) = \dfrac{-bx+b-2}{1-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) = 5,69x + 2\ln(1-x) \\ f'(x) = \dfrac{-5,69x+3,69}{1-x} \end{cases}$$

On obtient alors facilement $f'(0) = 3,69$ qui nous donne le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.




Ainsi l'angle $\alpha$ s'obtient à l'aide de la tangente :

$$\tan\theta = \frac{f'(0)}{1} = \frac{3,69}{1} \Longrightarrow \underline{\theta \approx 75,8°}$$

## Exercice 3. Espace — 5 points

**Commun à tous les candidats**

*On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A. On considère les points* $B(10\ ;\ -8\ ;\ 2)$, $C(-1\ ;\ -8\ ;\ 5)$ *et* $D(14\ ;\ 4\ ;\ 8)$.

**1.**

**1. a. Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).**

- Droite (AB).
  La droite $(AB)$ passant par le point $A(0;0;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\,(10;-8;2)$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. On a alors :

$$(AB)=\left\{M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ ;\ \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{pmatrix}=t\,\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\-8\\2\end{pmatrix}\quad,\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

  Une représentation paramétrique de la droite $(AB)$ est donc :

$$\boxed{(AB)\ :\ \begin{cases}x=10t\\y=-8t\\z=2t\end{cases}\quad,\ t\in\mathbb{R}}$$

- Droite (CD).
  La droite $(CD)$ passant par le point $C(-1;-8;5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{CD}\,(15;12;3)$ est l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{CM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{CD}$. On a alors :

$$(CD)=\left\{M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ ;\ \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-1\\y-8\\z-5\end{pmatrix}=k\,\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}15\\12\\3\end{pmatrix}\quad,\ k\in\mathbb{R}\right\}$$

  Une représentation paramétrique de la droite $(CD)$ est donc :

$$\boxed{(CD)\ :\ \begin{cases}x=15k-1\\y=12k-8\\z=3k+\ 5\end{cases}\quad,\ k\in\mathbb{R}}$$

**1. b. Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.**

- Sont-elles parallèles ?
  Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles puisque de façon évidente les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
- Sont-elles sécantes ?
  On cherche les éventuelles solutions du système :

$$\begin{cases}x=10t\\y=-8t\\z=2t\\x=-1+15k\\y=-8+12k\\z=5+3k\end{cases}\iff\begin{cases}-1+15k=10t\\-8+12k=-8t\\5+3k=2t\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}-1+15k=10t\\-8+12k=-8t\\(5+3k)\times(-4)=2t\times(-4)\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}-1+15k=10t\\-8+12k=-8t\\-20-12k=-8t\end{cases}$$

Les deux dernières équations ne sont pas compatibles, de ce fait le système n'admet pas de solution et les droites ne sont pas sécantes.

- Conclusion : les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires puisqu'elles ne sont ni parallèles, ni sécantes.

**2.** *On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.*

**2. a. Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.**

- Coordonnées de I.
Le point I de la droite (AB) est d'abscisse 5 donc en remplaçant $x$ par 5 dans l'équation de (AB) :

$$\begin{cases} x = 10t = 5 \\ y = -8t \\ z = 2t \end{cases} \Longrightarrow t = \frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x_I = 5 \\ y_I = -4 \\ z_I = 1 \end{cases}$$

- Coordonnées de J.
Le point J de la droite (CD) est d'abscisse 4 donc en remplaçant $x$ par 5 dans l'équation de (CD) :

$$\begin{cases} x = -1 + 15k = 4 \\ y = -8 + 12k \\ z = 5 + 3k \end{cases} \Longrightarrow k = \frac{1}{3} \Longrightarrow \begin{cases} x_J = 4 \\ y_J = -4 \\ z_J = 6 \end{cases}$$

- Distance IJ.
On est dans un repère orthonormé donc :

$$IJ = \sqrt{(4-5)^2 + (-4-(-4))^2 + (6-1)^2}$$
$$IJ = \sqrt{1+0+25}$$
$$IJ = \underline{\sqrt{26}\text{ u.l.}}$$

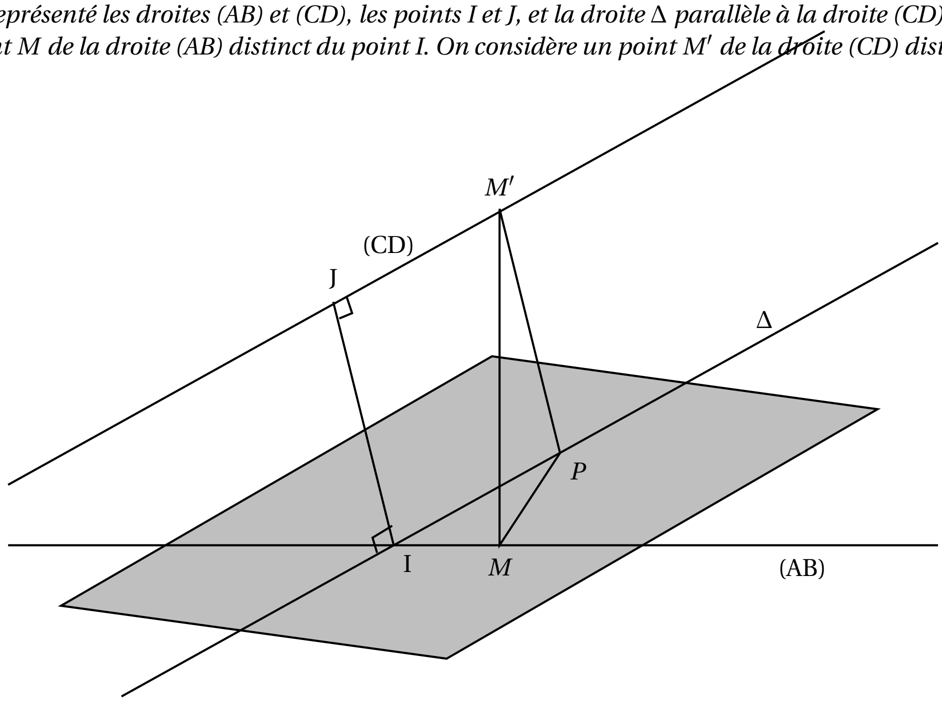
**2. b. Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).**

$$\begin{cases} I(5\,;\,-4\,;\,1) \\ J(4\,;\,-4\,;\,6) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} . \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = -10+0+10 = 0 \\ \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} . \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} = -15+0+15 = 0 \end{cases}$$

- Le vecteur $\overrightarrow{IF}$ est donc normal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. De ce fait, la droite (IJ) est orthogonale aux droites (AB) et (CD).
- Puisque le point I est un point de la droite (AB) (et évidemment de (IJ)), les droites (IJ) et (AB) sont perpendiculaires en I.
- Puisque le point J est un point de la droite (CD) (et évidemment de (IJ)), les droites (IJ) et (CD) sont perpendiculaires en J.
- Conclusion : La droite (IJ) est donc perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).

*La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).*

**3.** *Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD). Sur le schéma ci -dessous on a représenté les droites (AB) et (CD), les points I et J, et la droite $\Delta$ parallèle à la droite (CD) passant par I. On considère un point $M$ de la droite (AB) distinct du point I. On considère un point $M'$ de la droite (CD) distinct du point J.*




**3. a. Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point $M'$ coupe la droite $\Delta$ en un point que l'on notera $P$.**

- La droite $\Delta$ est parallèle à (CD) et passe par le point I, elle est donc incluse dans le plan (IJM'). Ce dernier étant bien défini puisque M' n'appartient pas à (IJ).
- Dans ce plan(IJM'), la droite $\Delta$ est perpendiculaire à (IJ) et donc aussi à la parallèle à (IJ) passant par M'.
- Conclusion : la parallèle à la droite (IJ) passant par le point $M'$ coupe la droite $\Delta$ en un point que l'on notera $P$.

**3. b. Démontrer que le triangle $MPM'$ est rectangle en $P$.**

- Les droites (IJ) et (M'P) sont parallèles donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{M'P}$ sont colinéaires.
- Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{M'P}$ est aussi orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
- Or la droite $\Delta$ (dirigée par $\overrightarrow{IP}$) est parallèle à (CD) donc le vecteurs $\overrightarrow{M'P}$ orthogonal à $\overrightarrow{CD}$ l'est aussi à $\overrightarrow{IP}$.
- On a donc :

$$\begin{cases}\overrightarrow{M'P} \perp \overrightarrow{IP} \\ \overrightarrow{M'P} \perp \overrightarrow{AB}\end{cases}$$

  $\overrightarrow{M'P}$ est donc orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (IMP), il l'est à tout vecteur de ce plan et en particulier à $\overrightarrow{M'P}$.
- Conclusion : le triangle $MPM'$ est rectangle en $P$.

**3. c. Justifier que $MM' > IJ$ et conclure.**

Dans le triangle rectangle MPM', l'hypoténuse [MM'] est de longueur supérieure au côté [M'P]. Or $M'P = IJ$ par construction donc $MM' > IJ$ ce qui prouve que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).

## Exercice 4. Obligatoire — 5 points

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

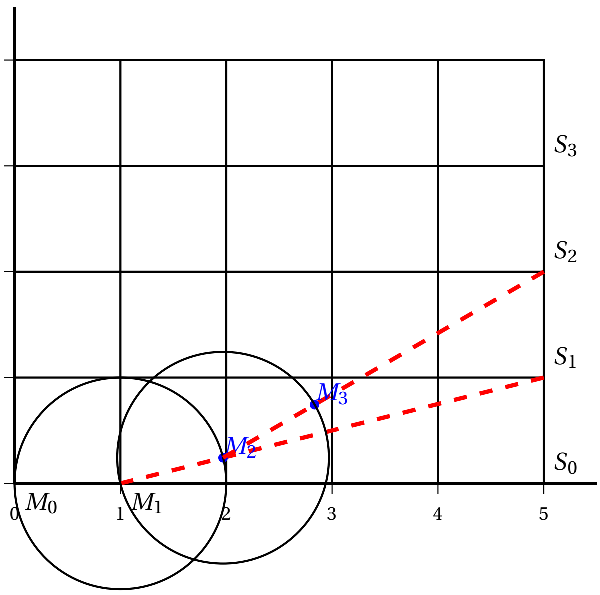
*Un scooter radio commandé se déplace en ligne droite à la vitesse constante de 1 m.s$^{-1}$. Il est poursuivi par un chien qui se déplace à la même vitesse. On représente la situation vue de dessus dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 mètre. L'origine de ce repère est la position initiale du chien. Le scooter est représenté par un point appartenant à la droite d'équation $x = 5$. Il se déplace sur cette droite dans le sens des ordonnées croissantes.*

## Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

*La situation est représentée par le graphique n° 1 donné en annexe. À l'instant initial, le scooter est représenté par le point $S_0$. Le chien qui le poursuit est représenté par le point $M_0$. On considère qu'à chaque seconde, le chien s'oriente instantanément en direction du scooter et se déplace en ligne droite sur une distance de 1 mètre. Ainsi, à l'instant initial, le chien s'oriente en direction du point $S_0$, et une seconde plus tard il se trouve un mètre plus loin au point $M_1$. À cet instant, le scooter est au point $S_1$. Le chien s'oriente en direction de $S_1$ et se déplace en ligne droite en parcourant 1 mètre, et ainsi de suite. On modélise alors les trajectoires du chien et du scooter par deux suites de points notées $(M_n)$ et $(S_n)$. Au bout de n secondes, les coordonnées du point $S_n$ sont $(5\,;\,n)$. On note $(x_n\,;\,y_n)$ les coordonnées du point $M_n$.*

1. **Construire sur le graphique n° 1 donné en annexe les points $M_2$ et $M_3$.**

Graphique n° 1




2. **$d_n$ est la distance chien-scooter $n$ secondes après le début . On a donc $d_n = M_nS_n$.Calculer $d_0$ et $d_1$.**

Pour calculer $D_1$, on applique Pythagore dans le triangle rectangle $M_1S_1S_0$.

$$\begin{cases} d_0 = M_0S_0 = \underline{5 \text{ u.l.}} \\ d_1 = M_1S_1 = \sqrt{4^2+1^2} = \underline{\sqrt{17} \text{ u.l.}} \end{cases}$$

3. **Justifier que le point $M_2$ a pour coordonnées $\left(1+\dfrac{4}{\sqrt{17}}\,;\,\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$.**

- La droite $(M_1S_1)$ est d'équation $y = mx + p$ avec avec $\begin{cases} M_1(1\,;\,0) \\ S_1(5\,;\,1) \end{cases}$ :

$$m = \frac{1}{4} \Longrightarrow 0 = \frac{1}{4} + p \Longrightarrow \underline{y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}$$

- Le cercle de centre $M_1(1\,;\,0)$ et de rayon 1 est d'équation : $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

- Donc $M_2$ est le point d'abscisse supérieure à 1, intersection du cercle et de ma droite $(M_1S_1)$.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \implies (x-1)^2 + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

Or

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)^2 = 1 &\iff \frac{1}{16}\left(17x^2 - 34x + 1\right) = 0 \\ &\iff 17x^2 - 34x + 1 = 0 \\ &\iff x = 1 + \frac{4}{\sqrt{17}} \text{ ou } x = 1 - \frac{4}{\sqrt{17}}\end{aligned}$$

La seule solution d'abscisse supérieure à 1 est bien $x = 1 + \frac{4}{\sqrt{17}}$ et donc $x_{M_2} = 1 + \frac{4}{\sqrt{17}}$.
Pour l'ordonnée on remplace dans l'équation de la droite et on obtient

$$y_{M_2} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{\sqrt{17}}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

- Conclusion : le point $M_2$ a pour coordonnées $\left(1 + \frac{4}{\sqrt{17}} ; \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

**4. On admet que, pour tout entier naturel $n$ :** $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{5 - x_n}{d_n} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{n - y_n}{d_n} \end{cases}$

**4. a. Le tableau ci-dessous, obtenu à l'aide d'un tableur, donne les coordonnées des points $M_n$ et $S_n$ ainsi que la distance $d_n$ en fonction de $n$. Quelles formules doit-on écrire dans les cellules C5 et F5 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes C et F?**

- En C5 on doit écrire : $\boxed{= C4 + (A4 - C4)/F4}$
- En F5 on doit écrire : $\boxed{= \text{RACINE } ( (D5 - B5)\hat{}2 + (E5 - C5)\hat{}2)}$.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $n$ | $M_n$ | | $S_n$ | | $d_n$ |
| 2 | | $x_n$ | $y_n$ | 5 | n | |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 5 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 5 | 1 | 4,123 105 63 |
| 5 | 2 | 1,970 142 5 | 0,242 535 63 | 5 | 2 | 3,502 672 91 |
| 6 | 3 | 2,835 155 47 | 0,744 285 12 | 5 | 3 | 3,126 467 89 |
| 7 | 4 | 3,527 580 47 | 1,465 774 98 | 5 | 4 | 2,930 924 04 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 28 | 24 | 4,999 797 51 | 21,226 834 2 | 5 | 24 | 2,773 165 8 |
| 29 | 25 | 4,999 870 53 | 22,226 834 2 | 5 | 25 | 2,773 165 8 |

**4. b. On admet que la suite $(d_n)$ est strictement décroissante. Justifier que cette suite est convergente et conjecturer sa limite à l'aide du tableau.**
La suite $(d_n)$ est strictement décroissante (admis) et minorée par 0 puisque c'est une distance. Donc elle est convergente.
On peut conjecturer que sa limite est 2,773 165 8 d'après le tableau.

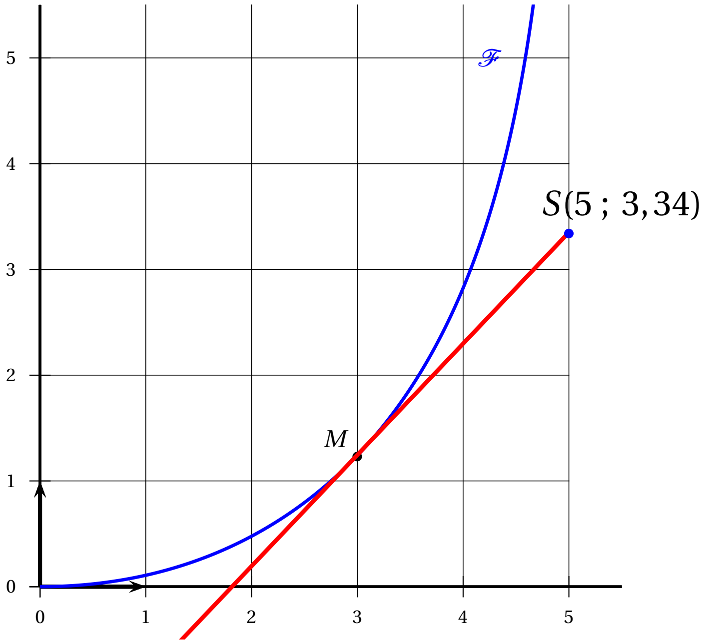
## Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

*On modélise maintenant la trajectoire du chien à l'aide de la courbe $\mathscr{F}$ de la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ de l'intervalle [0 ; 5[ par : $f(x) = -2,5\ln(1-0,2x) - 0,5x + 0,05x^2$. Cela signifie que le chien se déplace sur la courbe $\mathscr{F}$ de la fonction $f$.*

**1.** *Lorsque le chien se trouve au point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ de la courbe $\mathscr{F}$, où $x$ appartient à l'intervalle [0 ; 5[, le scooter se trouve au point $S$, d'ordonnée notée $y_S$. Ainsi le point $S$ a pour coordonnées $(5\ ;\ y_S)$. La tangente à la courbe $\mathscr{F}$ au point $M$ passe par le point $S$. Cela traduit le fait que le chien s'oriente toujours en direction du scooter. On note $d(x)$ la distance $MS$ entre le chien et le scooter lorsque $M$ a pour abscisse $x$.*

**1. a. Sur le graphique n° 2 donné en annexe, construire, sans calcul, le point $S$ donnant la position du scooter lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathscr{F}$ et lire les coordonnées du point $S$.**

Graphique n° 2




**1. b. On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle [0 ; 5[ et on admet que, pour tout réel $x$ de l'intervalle [0 ; 5[ : $f'(x) = \dfrac{x(1-0,1x)}{5-x}$. Déterminer par le calcul une valeur approchée au centième de l'ordonnée du point $S$ lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathscr{F}$.**

L'équation de la tangente $(T)$ á la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 3$ est $(T)\ :\ y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} f(3) & = -2,5\ln(0,4) - 1,05 \\ f'(3) & = 1,05 \end{array}\right. \quad \Bigg| \Rightarrow \quad (T)\ :\ \begin{array}{l} y = 1,05 \times (x-3)\ -2,5\ln(0,4) - 1,05 \\ \underline{y = 1,05x - 2,5\ln(0,4) - 4,2} \end{array}$$

Et pour $x = 2$ on obtient l'ordonnée du point $S$ lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathscr{F}$ soit :

$$\boxed{y_S = 1,05 - 2,5\ln(0,4) \approx \underline{3,34}}$$

**2. On admet que $d(x) = 0,1x^2 - x + 5$ pour tout réel $x$ de l'intervalle [0 ; 5[. Justifier qu'au cours du temps la distance $MS$ se rapproche d'une valeur limite que l'on déterminera.**

$$\lim_{x\to 5} d(x) = 0,1 \times 5^2 - 5 + 5 = 2,5$$

Donc au cours du temps la distance $\underline{MS \text{ se rapproche de } 2,5}$.

## Exercice 4. Spécialité : Matrices et Suites — 5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

*Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols. Au 1er juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards. On note $u_n$ le nombre de campagnols et $v_n$ le nombre de renards au 1er juillet de l'année $2012+n$.*

### Partie A - Un modèle simple

*On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 1,1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} &= 2\times10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{cases} \quad \textit{pour tout entier } n \geqslant 0, \textit{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \textit{ et } v_0 = 120.$$

**1.**

**1. a.** $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ **pour tout $n \geqslant 0$. Déterminer $A$ telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier $n$ et donner $U_0$.**

Avec les notations, pour tout $n \geqslant 0$ :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -2\,000 \\ 2\times10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \iff U_{n+1} = A \times U_n \quad \text{et} \quad \boxed{A = \begin{pmatrix} 1,1 & -2\,000 \\ 2\times10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix}}$$

On a alors

$$U_0 = \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 120 \end{pmatrix}$$

**1. b. Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1er juillet 2018.**

Pour $n$ entier :

$$\begin{cases} U_{n+1} = A \times U_n \\ U_0 = \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 120 \end{pmatrix} \end{cases} \implies U_n = A^n \times U_0$$

Donc

$$U_6 = A^6 \times U_0 \approx \begin{pmatrix} 1\,882\,353 \\ 96 \end{pmatrix}$$

Le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1er juillet 2018 est estimé à $\underline{1\,882\,353}$.

**2.** *Soit les matrices* $P = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5\,000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ *et* $P = \dfrac{1}{15\,000}\begin{pmatrix} 1 & -5\,000 \\ -1 & 20\,000 \end{pmatrix}$. *On admet que $P^{-1}$ est la matrice inverse de la matrice $P$ et que $A = P \times D \times P^{-1}$.*

**2. a. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.**

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(\mathscr{P}_n)\ :\ U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat $(\mathscr{P}_0)$ est vrai puisque :
  $$PD^0P^{-1} \times U_0 = P \times Id \times P^{-1} \times U_0 = PP^{-1} \times U_0 = U_0$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour $n$ entier fixé, $(\mathscr{P}_n)$ soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$U_{n+1} = A \times U_n$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : $(\mathscr{P}_n)$ soit vérifié et donc que $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$

$$U_{n+1} = A \times P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$$

En oute $A = P \times D \times P^{-1}$ soit :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= P \times D \times P^{-1} \times P \times D^n \times P^{-1} \times U_0\\
U_{n+1} &= PD\underbrace{\left(P^{-1}P\right)}_{Id}D^nP^{-1} \times U_0\\
U_{n+1} &= P\underbrace{\left(D \times Id \times D^n\right)}_{D^{n+1}}P^{-1} \times U_0\\
U_{n+1} &= PD^{n+1}P^{-1} \times U_0
\end{aligned}$$

On a alors montré que $U_{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1} \times U_0$ et donc que $(\mathscr{P}_{n+1})$ est vrai.

- **Conclusion**
  On a montré que $(\mathscr{P}_0)$ est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat $(\mathscr{P}_n)$ vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, $(\mathscr{P}_{n+1})$ est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0}$$

**2. b. Donner sans justification l'expression de la matrice $D^n$ en fonction de $n$.**

Pour tout entier $n$ :

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}}$$

**2. c. On admet que, pour tout entier naturel $n$ :**

$$\begin{cases} u_n &= \dfrac{2,8 \times 10^7 + 2 \times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\ v_n &= \dfrac{1\,400 + 400 \times 0,7^n}{15} \end{cases}$$

**Décrire l'évolution des deux populations.**

Puisque $-1 < q = 0,7 < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,7^n = 0$ et donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n &= \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2,8 \times 10^7 + 2 \times 10^6 \times 0,7^n}{15} = \dfrac{2,8 \times 10^7}{15} \approx \underline{1\,866\,667} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n &= \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1\,400 + 400 \times 0,7^n}{15} = \dfrac{1\,400}{15} \approx \underline{93} \end{cases}$$

Les populations vont tendre et se stabiliser vers : 93 renards et environ 1 866 667 campagnols.

## Partie B - Un modèle plus conforme à la réalité

*Dans la réalité, on observe que si le nombre de renards a suffisamment baissé, alors le nombre de campagnols augmente à nouveau, ce qui n'est pas le cas avec le modèle précédent. On construit donc un autre modèle, plus précis, qui tient compte de ce type d'observations à l'aide des relations suivantes :*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 1,1u_n - 0,001u_n \times v_n \\ v_{n+1} &= 2\times 10^{-7}u_n \times v_n + 0,6v_n \end{cases}$$ pour tout entier $n \geqslant 0$, avec $u_0 = 2000000$ et $v_0 = 120$.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | Modèle de la **partie B** | | |
| 2 | $n$ | $u_n$ | $v_n$ |
| 3 | 0 | 2 000 000 | 120 |
| 4 | 1 | 1 960 000 | 120 |
| 5 | 2 | 1 920 800 | 119 |
| 6 | 3 | 1 884 228 | 117 |
| 7 | 4 | 1 851 905 | 114 |
| 8 | 5 | 1 825 160 | 111 |
| 9 | 6 | 1 804 988 | 107 |
| 10 | 7 | 1 792 049 | 103 |
| 11 | 8 | 1 786 692 | 99 |
| 12 | 9 | 1 789 005 | 94 |
| 13 | 10 | 1 798 854 | 91 |
| 14 | 11 | 1 815 930 | 87 |
| 15 | 12 | 1 839 780 | 84 |
| 16 | 13 | 1 869 827 | 81 |
| 17 | 14 | 1 905 378 | 79 |
| 18 | 15 | 1 945 622 | 77 |
| 19 | 16 | 1 989 620 | 77 |
| 20 | 17 | 2 036 288 | 76 |
| 21 | 18 | 2 084 374 | 77 |
| 22 | 19 | 2 132 440 | 78 |
| 23 | 20 | 2 178 846 | 80 |
| 24 | 21 | 2 221 746 | 83 |
| 25 | 22 | 2 259 109 | 87 |
| 26 | 23 | 2 288 766 | 91 |
| 27 | 24 | 2 308 508 | 97 |

**1. Quelles formules faut-il écrire dans les cellules B4 et C4 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes B et C ?**

- En B4 : $= 1,1 \times B3 - 0,001 \times B3 \times C3$ ;
- En C4 : $= 2 \times 10^{-7} \times B3 \times C3 + 0,6 \times C3$ .

**2. Avec le deuxième modèle, à partir de quelle année observe-t-on le phénomène décrit (baisse des renards et hausse des campagnols) ?**

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Année | Modèle de la **partie B** | | |
| 2020 | 8 | 1 786 692 | 99 |
| 2021 | 9 | 1 789 005 | 94 |

En 2021, le nombre de renards a baissé et celui des campagnols augmenté.

## Partie C

**Dans cette partie on utilise le modèle de la partie B.**
**Est - il possible de donner à $u_0$ et $v_0$ des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel $n$ on ait $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$ ? (On parle alors d'état stable.)**

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 1,1u_n - 0,001u_n \times v_n \\ v_{n+1} & = & 2\times 10^{-7}u_n \times v_n + 0,6v_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geq 0$$

On cherche donc si il existe $u$ et $v$ tels que :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} u = 1,1u - 0,001u \times v \\ v = 2\times 10^{-7}u \times v + 0,6v \end{cases} &\iff \begin{cases} 0,1u = 0,001u \times v \\ 0,4v = 2\times 10^{-7}u \times v \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} u = 0,01u \times v \\ 2v = 10^{-6}u \times v \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} u(1 - 0,01v) = 0 \\ v\left(2 - 10^{-6}u\right) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} v = 100 \text{ ou } u = 0 \\ u = 2\times 10^{6} \text{ ou } v = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les populations initiales ne sont pas nulles donc il possible de donner à $u_0$ et $v_0$ des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, ces valeurs sont :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = 2\,000\,000 \\ v_0 = 100 \end{cases}}$$

**Fin du devoir**