Math93.com

Baccalauréat 2017 - S Amérique du Nord

Série S Obli. et Spé.
2 Juin 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Partie A

Dans le cadre de son activité, une entreprise reçoit régulièrement des demandes de devis. Les montants de ces devis sont calculés par son secrétariat. Une étude statistique sur l'année écoulée conduit à modéliser le montant des devis par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2900$ euros et d'écart-type $\sigma = 1250$ euros.

1. Si on choisit au hasard une demande de devis reçue par l'entreprise, quelle est la probabilité que le montant du devis soit supérieur à 4000 euros ?

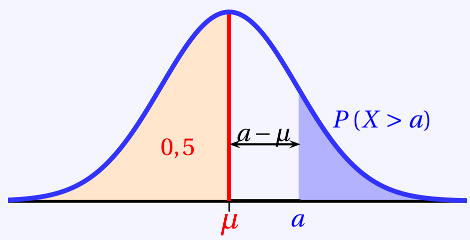
Propriété 1 ($P(X > a)$; $a > \mu$)

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0,5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$\boxed{P(X > a) = 0,5 - P\left(\mu < X < a\right)}$$



La probabilité cherchée est $P(X > 4000)$.
La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 2900$ euros et d'écart-type $\sigma = 1250$ euros donc puisque $4000 > \mu$ on a :

$$P(X > 4000) = 0,5 - P(2900 < X < 4000) \approx \underline{0,189}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 :* $\left(0,5 - \textit{TIStat.normFDR}(2900\,,\,4000\,,\,2900\,,\,1250)\right) \approx \underline{0,189\,430}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*(2900 , 4000 , 2900 , 1250) *ou (fr.) normalfrép*(2900 , 4000 , 2900 , 1250)
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* ⇒ *NormCD*(2900 , 4000, 1250 , 2900)

2. Afin d'améliorer la rentabilité de son activité, l'entrepreneur décide de ne pas donner suite à 10% des demandes. Il écarte celles dont le montant de devis est le moins élevé. Quel doit être le montant minimum d'un devis demandé pour que celui-ci soit pris en compte? Donner ce montant à l'euro près.

On cherche donc le montant k du devis tel que $P(X<k)=0,1$.

On cherche k tel que $P(X\leq k)=0,1$ où X qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(2900\ ;\ 1250^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-2} près :

$$\boxed{P(X\leq k)=0,1 \iff k\approx \underline{1298,06}}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0.1\ ,\ 2900\ ,\ 1250)\approx \underline{1\,298,060\,543}$
> - *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0.1\ ,\ 2900\ ,\ 1250)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0.1\ ,\ 2900\ ,\ 1250)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0.1\ ,\ 1250\ ,\ 2900)$

Le montant minimum d'un devis demandé pour que celui-ci soit pris en compte est donc à l'euro près de <u>1 298 euros</u>.

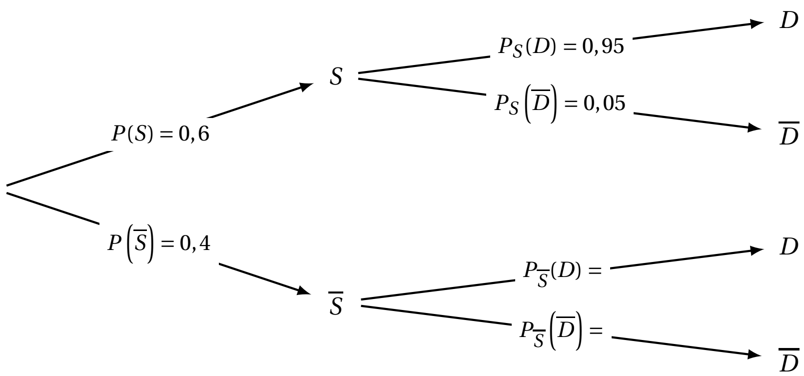
Partie B

Ce même entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam. Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé "dossier spam". Le fabricant affirme que 95% des spams sont déplacés. De son côté, l'entrepreneur sait que 60% des messages qu'il reçoit sont des spams. Après installation du logiciel, il constate que 58,6% des messages sont déplacés dans le dossier spam. Pour un message pris au hasard, on considère les événements suivants : D : « le message est déplacé » ; S : « le message est un spam».

1. Calculer $P(S\cap D)$.

- Le fabricant affirme que 95% des spams sont déplacés donc $P_S(D)=0,95$
- L'entrepreneur sait que 60% des messages qu'il reçoit sont des spams donc $P(S)=0,6$.
- Il constate que 58,6% des messages sont déplacés dans le dossier spam donc $P(D)=0,586$.

Résumons les données de l'exercice à l'aide d'un arbre :



On a donc :

$$P(S\cap D)=P(S)\times P_S(D)=0,6\times 0,95=\underline{0,57}$$

2. On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à 0,04.

La probabilité cherchée est $P_{\overline{S}}(D)$.

Les évènements S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$P(D)=P(D\cap S)+P\left(D\cap\overline{S}\right)$$
$$0,586=0,57+P\left(\overline{S}\right)\times P_{\overline{S}}(D)$$
$$0,586=0,57+0,4\times P_{\overline{S}}(D)$$

On obtient donc :

$$P_{\overline{S}}(D)=\frac{0,586-0,57}{0,4}=\underline{0,04}$$

3. On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ?

D La probabilité cherchée est $P_{\overline{D}}(S)$ or on a :

$$P_{\overline{D}}(S) = \frac{P\left(\overline{D} \cap S\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{0,6 \times 0,05}{1 - 0,586} \approx \underline{0,072}$$

4. Pour le logiciel choisi par l'entreprise, le fabricant estime que 2,7% des messages déplacés vers le dossier spam sont des messages fiables. Afin de tester l'efficacité du logiciel, le secrétariat prend la peine de compter le nombre de messages fiables parmi les messages déplacés. Il trouve 13 messages fiables parmi les 231 messages déplacés pendant une semaine. Ces résultats remettent-ils en cause l'affirmation du fabricant ?

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 231$ messages déplacés, il est constaté que 13 d'entre eux sont fiables. ». Donc la fréquence observée de messages déplacés fiables est
    $$f = 13 \div 231 \approx 0,056277056 \text{ soit } \underline{f \approx 0,056}$$
  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion de messages déplacés fiables est $\underline{p = 2.7\%}$ ».
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 231$, $p = 2,7$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 231 \geq 30 \\ \checkmark & np = 231 \times 0,027 = 6,237 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 231 \times 0,973 = 224,763 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,027 - 1,96\ \frac{\sqrt{0,027 \times 0,973}}{\sqrt{231}}\ ;\ 0,027 + 1,96\ \frac{\sqrt{0,027 \times 0,973}}{\sqrt{231}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\ \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,0061$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0,006}$.
- $p + 1,96\ \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,0479$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0,048}$.

$$\boxed{I_{231} \approx [0,006\ ;\ 0,048]}$$

- **Conclusion**
  La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle, $f \approx 0,056 \notin I$ donc le résultat du contrôle remet en question l'hypothèse, au seuil de 95%.

Exercice 2. 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

$$\left\{\begin{array}{rcl}[-2\,;\,2] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x)=-\dfrac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)+\dfrac{9}{4}\end{array}\right.$$

Partie A

1. **Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2\,;\,2]$, $f(-x)=f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?**
Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2\,;\,2]$, on a :

$$\begin{aligned}f(-x)&=-\frac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{-x}{b}}+\mathrm{e}^{-\frac{-x}{b}}\right)+\frac{9}{4}\\ f(-x)&=-\frac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{-x}{b}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\right)+\frac{9}{4}\\ f(-x)&=\underline{f(x)}\end{aligned}$$

On peut en déduire que la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) parallèlement à l'axe des abscisses (Ox) .

2. **Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;\,2]$: $f'(x)=-\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)$.**
La fonction f est définie et dérivable sur $[-2\,;\,2]$. Pour tout réel x de $[-2\,;\,2]$ on a :

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\frac{b}{8}\left(\frac{1}{b}\times\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}+\left(-\frac{1}{b}\right)\times\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)\\ f'(x)&=-\frac{b}{8}\times\left(\frac{1}{b}\right)\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)\\ f'(x)&=\underline{-\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)}\end{aligned}$$

3. **Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.**
Pour tout x de $[-2\,;\,2]$ on a en factorisant par $\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}$:

$$f'(x)=-\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)=-\frac{1}{8}\times\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\times\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{2x}{b}}\right)=\underline{\frac{1}{8}\times\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\times\left(\mathrm{e}^{-\frac{2x}{b}}-1\right)}$$

Les facteurs $\frac{1}{8}\times\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}$ sont strictement positifs donc f' est du signe du facteur $\left(\mathrm{e}^{-\frac{2x}{b}}-1\right)$. Pour tout x de $[-2\,;\,2]$ on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{b}}-1=0&\iff \mathrm{e}^{-\frac{2x}{b}}=1\\ &\iff \ln\mathrm{e}^{-\frac{2x}{b}}=\ln 1\\ &\iff -\frac{2x}{b}=0\\ &\iff x=0\end{aligned}$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{2x}{b}}-1>0\iff \mathrm{e}^{-\frac{2x}{b}}>1$$

On compose par la fonction ln strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{b}}-1>0&\iff \ln\mathrm{e}^{-\frac{2x}{b}}>\ln 1\\ &\iff -\frac{2x}{b}>0\end{aligned}$$

Or $b>0$ donc

$$\mathrm{e}^{-\frac{2x}{b}}-1>0\iff x<0$$

On en conclut donc que :

x	-2		0		2
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$f(-2)$	$\nearrow$	$\dfrac{-b+9}{4}$	$\searrow$	$f(2)$

Le sommet S de la courbe est donc de coordonnées $\underline{S\left(0\,;\,\dfrac{-b+9}{4}\right)}$.

Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

1. Justifier que $b = 1$.

On souhaite que le point S soit à 2 m du sol donc puisque le sommet S de la courbe est donc de coordonnées $S\left(0;\,\dfrac{-b+9}{4}\right)$ on a :

$$\frac{-b+9}{4} = 2 \Longleftrightarrow -b+9 = 8 \Longleftrightarrow \underline{b=1}$$

2. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;2]$ et en déduire une valeur approchée de a au centième.

Puisque $b = 1$ d'après la question précédente on a :

$$f(2) = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{2}{1}} + e^{-\frac{2}{1}}\right) + \frac{9}{4} = -\frac{1}{8}\left(e^{2} + e^{-2}\right) + \frac{9}{4} \approx \underline{1{,}309}$$

Soit

x	0		α		2
Variations de f	$\dfrac{-b+9}{4} = 2$	$\searrow$	1.5	$\searrow$	$f(2) \approx 1.3$

Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- **Application du corollaire sur $[0;2]$** :
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[0;2]$;
  - Le réel $k = 1.5$ est compris entre $f(0) = 2$ et $f(2) \approx 1.3$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x) = 1.5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;2]$.
- **Valeur approchée** .
  Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(1,76) & \approx & 1,502 > 1.5 \\ f(1,77) & \approx & 1.495 < 1.5 \end{array}\right| ,\quad \text{donc } 1,76 < \alpha < 1,77.$$

  Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\alpha \approx 1,76$.
- **Conclusion** : La hauteur du mur étant de 1,5 m, on a $\underline{a = \alpha \approx 1,76}$

3. Dans cette question, on choisit $a = 1{,}8$ et $b = 1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2}. Que décide le client ?

Puisque $b = 1$ on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl}[-2\,;2] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f(x) = -\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) + \dfrac{9}{4}\end{array}\right.$$

- Surface d'un vantail.
  La symétrie invoquée lors de la question (A.1.) assure que les vantaux ont la même surface.
  Pour calculer la masse d'un vantail on va tout d'abord chercher sa surface. Cette aire correspond d'après la modélisation proposée, à l'aire située sous la courbe $\mathscr{C}_f$, au dessus de l'axe des abscisses et entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = a = 1{,}8$.
  La fonction f étant continue et positive sur l'intervalle $[-2\,;2]$, cette aire s'exprime, en unités d'aire par : $\displaystyle\int_0^{1{,}8} f(x)\,\mathrm{d}x$.
  Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ étant $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$, on a :

$$\mathscr{A} = \int_0^{1{,}8} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \times \int_0^{1{,}8} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{A} = \int_0^{1{,}8} -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{9}{4}\,\mathrm{d}x$$
$$\mathscr{A} = \left[\ -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{9}{4}x\ \right]_0^{1{,}8}$$
$$\mathscr{A} = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{1.8} - \mathrm{e}^{-1.8}\right) + \frac{9}{4} \times 1{,}8 + \underbrace{\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{0}\right) - \frac{9}{4} \times 0}_{=0}$$
$$\mathscr{A} = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{1.8} - \mathrm{e}^{-1.8}\right) + \frac{81}{20} \approx \underline{3{,}314\text{ u.a.}}$$

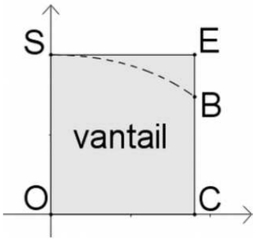
- Masse d'un vantail.
  La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2} donc la masse totale est de :

$$\mathscr{M} = 20\text{ kg} \times \mathscr{A} \approx 66{,}289\text{ kg}$$

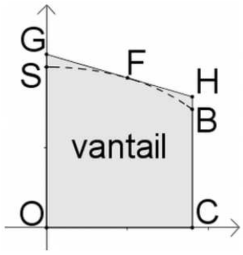
  Le client doit décider d'automatiser son portail car la masse d'un vantail excède 60 kg.

Partie C

On conserve les valeurs $a = 1{,}8$ et $b = 1$. Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle $OCES$, soit un trapèze $OCHG$ comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle



Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique. Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

- On rappelle que la surface d'un vantail est de : $\mathscr{A} \approx \underline{3{,}314 \text{ u.a.}}$ mais sa valeur ne nous sera pas utile ici.
- Forme 1.
  Le rectangle $OCES$ a donc pour dimension : $\underline{\mathscr{A}_{OCES} = 1{,}8 \times 2 = 3{,}6 \text{ u.a.}}$.
  L'aire de partie perdue est : $A_1 = 2 \times 1{,}8 - \mathscr{A}$.
- Forme 2.
  - Équation de la tangente au point d'abscisse 1 :

$$\begin{cases} f'(1) = -\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) \\ f(1) = -\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right) + \dfrac{9}{4} \end{cases} \Longrightarrow y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

  - L' ordonnée du point $G\left(0\,;\ y_G\right)$ appartenant à cette tangente est donc :

$$\begin{aligned} y_G &= f'(1)(0-1) + f(1) \\ y_G &= f(1) - f'(1) \\ y_G &= \frac{1}{8}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) - \frac{1}{8}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right) + \frac{9}{4} \\ y_G &= -2 \times \frac{1}{8} e^{-1} + \frac{9}{4} \\ y_G &= \frac{9 - \mathrm{e}^{-1}}{4} \approx \underline{2{,}158} \end{aligned}$$

  - L' ordonnée du point $H\left(1.8\,;\ y_H\right)$ appartenant à cette tangente est donc :

$$\begin{aligned} y_H &= f'(1)(1.8-1) + f(1) \\ y_H &= f(1) + 0.8 f'(1) \\ y_H &= -0{,}1\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) - \frac{1}{8}\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right) + \frac{9}{4} \approx \underline{1{,}629} \end{aligned}$$

  - L'aire du trapèze est :

$$\mathscr{A}_{OCHG} = \frac{(OG + CH) \times OC}{2} = \frac{(y_G + y_H) \times 1{,}8}{2} \approx \underline{3{,}408}$$

  - L'aire de la partie perdue est : $A_2 = \mathscr{A}_{OCHG} - \mathscr{A}$.
- Conclusion.
  On économise donc $A_1 - A_2$ soit environ :

$$A_1 - A_2 = \left(\mathscr{A}_{OCES} - \mathscr{A}\right) - \left(\mathscr{A}_{OCHG} - \mathscr{A}\right) = \mathscr{A}_{OCES} - \mathscr{A}_{OCHG} \approx \underline{0{,}192 \text{ m}^2}$$

  de bois en choisissant la forme 2.

Exercice 3. 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs. On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- *pour tout* $n \geq 0$, $u_n \geq 0$.
- *pour tout* $n > 0$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

- Pour u_1, on a $u_0 = 3$ donc :

$$u_0 + u_1 = u_0 \times u_1 \iff 3 + u_1 = 3u_1 \iff \boxed{u_1 = \frac{3}{2}}$$

- Pour u_2, on a $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ donc :

$$u_0 + u_1 + u_2 = u_0 \times u_1 \times u_2 \iff 3 + \frac{3}{2} + u_2 = 3 \times \frac{3}{2} \times u_2 \iff \boxed{u_2 = \frac{9}{7}}$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}$.

2. a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

- Pour tout entier $n > 0$,

$$s_{n+1} = \underbrace{u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}}_{s_n} + u_n = s_n + u_n$$

- On vient de montrer que pour tout entier n on a : $s_{n+1} - s_n = u_n$.
  Or par hypothèse,

$$\text{pour tout } n \geq 0,\ u_n \geq 0 \text{ donc } s_{n+1} - s_n = u_n \geq 0$$

  ce qui implique la croissance de la suite (s_n).
  Le premier terme de la suite étant $s_0 = u_0 > 1$, cela implique que pour tout entier n, $s_n > 1$.

2. b. En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.

Pour tout entier $n > 0$ on a :

$$s_{n+1} = \underbrace{u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n-1}}_{s_n} \times u_n$$

$$s_{n+1} = s_n \times u_n$$

Donc pour tout entier $n > 0$ on a :

$$\left.\begin{cases} s_{n+1} = s_n \times u_n \\ s_{n+1} = s_n + u_n \end{cases}\right| \implies s_n + u_n = s_n \times u_n \iff s_n = s_n \times u_n - u_n$$

$$\iff s_n = u_n \times (s_n - 1)$$

Or on a montré que pour $n > 0$, $s_n > 1$ donc $(s_n - 1) \neq 0$ soit

$$\iff \boxed{\frac{s_n}{s_n - 1} = u_n}$$

2. c. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$.

Puisque pour tout entier n, $\begin{cases} s_n > 1 > 0 \\ s_n - 1 > 0 \end{cases}$, le quotient $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$ est un quotient de deux termes strictement positifs avec de façon triviale $s_n > s_n - 1$. On a donc pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$.

3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme un pour une valeur de n donnée.

3. a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

Entrée	Saisir n
	Saisir u
TRAITEMENT	s prend la valeur u
	Pour i allant de 1 à n
	u prend la valeur $\boxed{\dfrac{s}{s-1}}$
	s prend la valeur $\boxed{s+u}$
	Fin pour
SORTIE	Afficher u

3. b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de un pour différentes valeurs de l'entier n. Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?
La suite (u_n) semble converger vers 1.

4.

4. a. Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.
Notons pour tout entier naturel $n \geq 1$ le postulat

$$(P_n)\ :\ s_n > n$$

- **Initialisation**
Pour $n = 1$, le postulat (P_1) est vrai puisque : $s_1 = u_0 > 1$
- **Hérédité**
Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$s_{n+1} = s_n + u_n$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que : $s_n > n$

$$s_{n+1} = s_n + u_n > n + u_n$$

or d'après la question (2.c.) on a pour tout entier n, $u_n > 1$ donc :

$$\left\{\begin{array}{l} s_{n+1} = s_n + u_n > n + u_n \\ u_n > 1 \end{array}\right. \Bigg| \implies s_{n+1} > n+1$$

On a alors montré que $s_{n+1} > n+1$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
On a montré que (P_1) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{s_n > n}$$

4. b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

- Trivialement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par théorème de comparaison puisque pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$$

- D'après la question (2.c.), pour $n > 0$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$ donc en divisant les deux membres par s_n (non nul) on a :

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1} = \frac{s_n \div s_n}{(s_n - 1) \div s_n} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{s_n}}$$

On passe alors à la limite dans ce quotient :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n} = 0 \end{array}\right. \Bigg| \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{s_n}} = 1 \implies \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

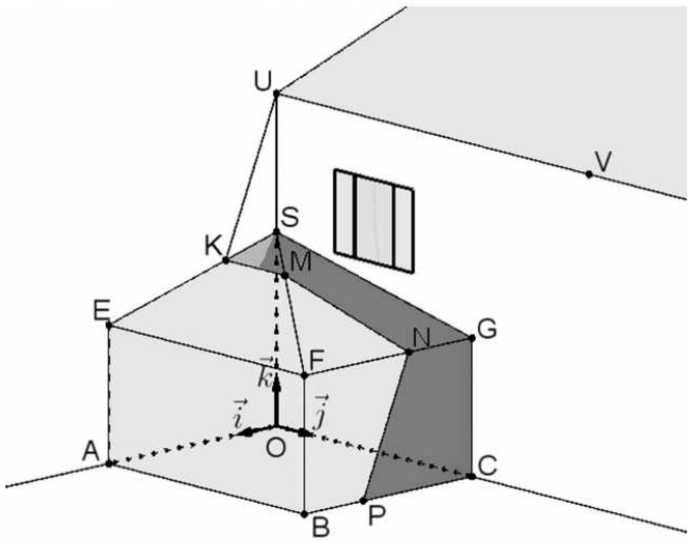
Exercice 4. Obligatoire : 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. *Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.*

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires. *(donnée 1)*
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB). *(donnée 2)*
- Les arêtes [UV] et [EF] des toits sont parallèles. *(donnée 3)*

Le point K appartient au segment [SE], le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP qui est la limite ombre-soleil.

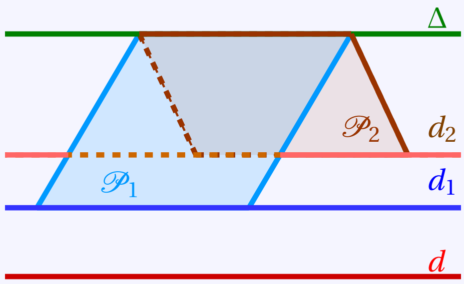


1. Sans calcul, justifier que :

1. a. le segment [KM] est parallèle au segment [UV] ;

Théorème 3 (Théorème du toit)

- <u>$1^{\text{ère}}$ formulation</u> : Si une droite (d) est parallèle à deux plans sécants, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_2$ alors (d) est parallèle à (Δ), la droite d'intersection des deux plans .
- <u>$2^{\text{ème}}$ formulation</u> : Soit (d_1) et (d_2) deux droites parallèles. Les plans $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_2$ contenant respectivement (d_1) et (d_2) se coupent en (Δ) qui est parallèle aux droites (d_1) et (d_2).

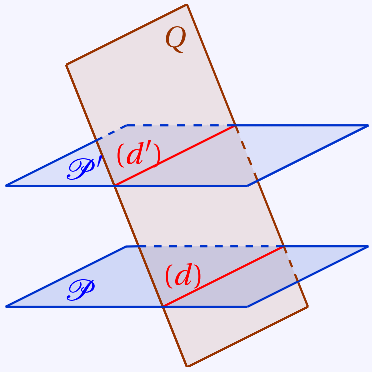


- D'après les données *(donnée 1)*, la droite (UV) du plan (UVK) et la droite (EF) du plan (SEF) sont parallèles.
- Les plans (UVK) et (SEF) sont sécants selon la droite (KM).
- D'après le théorème du toit (formulation 2), les droites (KM), (UV) et (EF) sont parallèles.

1. b. le segment [NP] est parallèle au segment [UK].

Théorème 4 (Parallélisme de deux droites)

Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles, tout plan $\mathscr{Q}$ qui coupe le plan $\mathscr{P}$, coupe aussi le plan $\mathscr{P}'$ et les droites d'intersection (d) et (d') sont parallèles.



- Les plans (SOA) et (GCB). *(donnée 2)*
- Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP donc Le plan (UKV) coupe le plan (SEA) selon la droite (UK).
- Par conséquent le plan (UKV) coupe le plan (GCB) selon une droite qui parallèle à (UK) et les droites (UK) et (NP) sont parallèles.

2. *Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$. Les coordonnées des différents points sont les suivantes : A(4; 0; 0), B(4; 5; 0), C(0; 5; 0),E(4; 0; 2, 5), F(4; 5; 2,5), G(0; 5; 2,5), S(0; 0; 3,5), U(0; 0; 6) et V(0; 8; 6). On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UV K) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.*

2. a. Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1,2. Vérifier que les coordonnées du point K sont (1,2;0;3,2).

On va pour cela utiliser le fait que le point K appartient à la droite (SE). Dans le repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} S\,(0\,;\,0\,;\,3,5) \\ E\,(4\,;\,0\,;\,2,5) \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{SE}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$$

La droite (SE) passant par le point $S\,(0;0;3,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{SE}\ (4;0;-1)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{SM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{SE}$. On a alors :

$$(SE)=\left\{M(x\,;\,y\,;\,z)\,;\,\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-3,5\end{pmatrix}=t\,\overrightarrow{SE}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}\quad,\quad t\in\mathbb{R}\right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite (SE) est donc :

$$\boxed{(SE)\ :\ \left\{\begin{array}{l} x=4t \\ y=0 \\ z=-t+3,5 \end{array}\right.\quad,\ t\in\mathbb{R}}$$

Puisque le point K a pour abscisse 1,2, on a

$$4t=1,2 \Longleftrightarrow t=0,3 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_K=1,2 \\ y_K=0 \\ z_K=-0,3+3,5=3,2 \end{array}\right.$$

Et donc les coordonnées du point K sont $\underline{\text{K}(1,2\ ;0\ ;3,2)}$.

2. b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées (7 ; 0 ; 3) est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).

- Dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ on a :

$$\left\{\begin{array}{l} U\,(0\,;\,0\,;\,6) \\ V\,(0\,;\,8\,;\,6) \\ K\,(1{,}2\,;\,0\,;\,3{,}2) \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{UV}\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{UK}\begin{pmatrix}1{,}2\\0\\-2{,}8\end{pmatrix}$$

Théorème 5

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{UK}$ ne sont pas colinéaires et engendrent donc le plan (UVK).

On a :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix} . \overrightarrow{UV}\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} = 0+0+0 = 0 \\ \\ \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix} . \overrightarrow{UK}\begin{pmatrix}1{,}2\\0\\-2{,}8\end{pmatrix} = 7\times 1{,}2 + 0 + 3\times(-2{,}8) = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{UV} = 0 \\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{UK} = 0 \end{array}\right.$$

Donc d'après le théorème 5, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (UVK) car il est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{UK}$ non colinéaires de ce plan.

- Équation du plan (UVK).

Propriété 2

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{u} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix} . \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a\,(x-x_A) + b\left(y-y_A\right) + c\,(z-z_A) = 0$$

Donc d'après la propriété 2 :

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (UVK) \Longleftrightarrow \overrightarrow{UM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-6\end{pmatrix} . \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix} = 0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (UVK) \Longleftrightarrow 7x + 3(z-6) = 0$$

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (UVK) \Longleftrightarrow 7x + 3z - 18 = 0$$

$$\boxed{(UVK)\ :\ 7x+3z-18=0}$$

2. c. Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).

- Dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$on a :

$$\left\{\begin{array}{l} F\,(4\,;\,5\,;\,2{,}5) \\ G\,(0\,;\,5\,;\,2{,}5) \end{array}\right| \Longrightarrow \overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$$

La droite (FG) passant par le point $F(4;5;2,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{FG}\,(-4;0;0)$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{FM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{FG}$. On a alors :

$$(FG)=\left\{M(x\,;\,y\,;\,z)\,;\,\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}x-4\\y-5\\z-2,5\end{pmatrix}=t\,\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite (FG) est donc :

$$\boxed{(FG)\ :\ \left\{\begin{array}{l}x=-4t+4\\y=5\\z=2,5\end{array}\right.\quad ,\ t\in\mathbb{R}}$$

- Les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG) vérifient donc le système :

$$\begin{cases}7x+3z-18=0\\x=-4t+4\\y=5\\z=2,5\end{cases}$$

Et donc :

$$7\times(-4t+4)+3\times2,5-18=0\Longleftrightarrow t=\frac{5}{8}\quad\text{et donc}\quad\left\{\begin{array}{l}x_N=-4\times\dfrac{5}{8}+4=1,5\\y_N=5\\z_N=2,5\end{array}\right.$$

Les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG) sont donc $\underline{N(1,5\,;\,5\,;\,2,5)}$.

2. d. Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.

Pour construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda :

- 1) On place le point K' de $[OA]$ tel que $OK'=\dfrac{3}{10}OA$ puisque A d'abscisse 4 et K d'abscisse 1,2 donc $1,2\div4=0,3$;
- 2) On trace la parallèle à (OS) passant par K', elle coupe (SE) en K ;
- 3) On trace la parallèle à (EF) passant par K, elle coupe (SF) en M ;
- 4) On place le point N de [FG] tel que $GN=\dfrac{3}{8}GF$ puisque F d'abscisse 4 et N d'abscisse 1,5 donc $1,5\div4=\dfrac{3}{8}$;
- 5) On trace la parallèle à (UK) passant par N, elle coupe [BC] en P.

3. Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment [SG] avec l'horizontale doit être supérieur à 7°. Cette condition est-elle remplie ?

On appelle G_1 le projeté orthogonal de G sur la droite (SO), c'est à dire le point du segment [SO] tel que le triangle S$G$$G_1$ soit rectangle en G_1. Le point G_1 à la même côte que le point $G(0\,;\,5\,;\,\underline{2,5})$ donc : On a alors :

$$SG_1=3,5?2,5=1\ \text{ et }\ G_1G=y_G=5$$

dans le triangle S$G$$G_1$ rectangle en G_1 on a :

$$\tan\widehat{SGG_1}=\frac{SG_1}{G_1G}=\frac{1}{5}\Longrightarrow\widehat{SGG_1}=\arctan\frac{1}{5}\approx11°>7°$$

L'angle du segment [SG] avec l'horizontale est bien supérieur à 7°. La condition est donc bien remplie.

<u>Remarque</u> : On peut aussi calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{GS}$ et $\overrightarrow{CO}$ de deux manières différentes (méthode vue en 1ère S et Tle S). On obtient avec les coordonnées des vecteurs : 25 et avec le cosinus : $5\times\sqrt{26}\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{GS}\,;\,\overrightarrow{CO}}\right)$.

Soit $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{GS}\,;\,\overrightarrow{CO}}\right)=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$ et on trouve le même angle : $11,3099°$ environ

Exercice 4 . Spécialité : 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Une association gère des activités pour des enfants. Elle propose deux programmes d'activités, le programme A : cirque - éveil musical, et le programme B : théâtre - arts plastiques. À sa création en 2014, l'association compte ISO enfants qui suivent tous le programme A. Pour chacune des années suivantes, le nombre d'enfants inscrits dans l'association reste égal à 150*. On dispose également des informations suivantes : Chaque enfant ne peut suivre qu'un seul programme : soit le programme A, soit le programme B. D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association. D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent à nouveau le programme B et les autres quittent l'association. Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A. On modélise le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année* $2014+n$ *respectivement par deux suites* (a_n) *et* (b_n) *et on note* U_n *la matrice ligne* $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$*. On a donc* $U_0 = \begin{pmatrix} 150 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = U_n M$ où $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

On note le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année $2014+n$ respectivement par deux suites (a_n) et (b_n).

- Programme A
  « *D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association. Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A.* »
  - D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A soit : $0,2 \times a_n$;
  - Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A or ils proviennent des 40% des départs du programme A et des 40% des départs du programme B soit : $0,4 \times a_n + 0,4 \times b_n$.

$$a_{n+1} = 0,2 \times a_n + 0,4 \times a_n + 0,4 \times b_n = \underline{0,6a_n + 0,4b_n}$$

- Programme B
  « *D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent à nouveau le programme B et les autres quittent l'association.* »
  - 40 % des inscrits au programme A choisissent le programme B soit : $0,4 \times a_n$;
  - D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent à nouveau le programme B soit : $0,6 \times b_n$.

$$b_{n+1} = \underline{0,4a_n + 0,6b_n}$$

On obtient donc pour tout entier n :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,6a_n + 0,4b_n & 0,4a_n + 0,6b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et donc pour tout entier n :

$$\boxed{U_{n+1} = U_n \times M \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}}$$

 ©ISSN 2272-5318

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} 75+75\times 0,2^n & 75-75\times 0,2^n \end{pmatrix}$.

Montrons ce résultat par récurrence. Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n)\ :\ U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75+75\times 0,2^n & 75-75\times 0,2^n \end{pmatrix}$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$\begin{cases} 75+75\times 0,2^0 = 150 \\ 75-75\times 0,2^0 = 0 \end{cases} \quad \text{et } U_0 = \begin{pmatrix} 150 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

$$a_{n+1} = 0,6a_n + 0,4b_n \qquad\Big|\qquad b_{n+1} = 0,4a_n + 0,6b_n$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75+75\times 0,2^n & 75-75\times 0,2^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0,6\left(75+75\times 0,2^n\right) + 0,4\left(75-75\times 0,2^n\right) \\ &= 45 + 0,6\times 75\times 0,2^n + 30 - 0,4\times 75\times 0,2^n \\ &= 75 + (0,6-0,4)\times 75\times 0,2^n \\ &= 75 + 0,2\times 75\times 0,2^n \\ &= 75 + 75\times 0,2^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 0,4\left(75+\times 75\times 0,2^n\right) + 0,6\left(75-\times 75\times 0,2^n\right) \\ &= 30 + 0,4\times 75\times 0,2^n + 45 - 0,6\times 75\times 0,2^n \\ &= 75 + (0,4-0,6)\times 75\times 0,2^n \\ &= 75 - 0,2\times 75\times 0,2^n \\ &= 75 - 75\times 0,2^{n+1} \end{aligned}$$

On a alors montré que $U_{n+1} = \begin{pmatrix} 75+75\times 0,2^{n+1} & 75-75\times 0,2^{n+1} \end{pmatrix}$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**
  On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75+75\times 0,2^n & 75-75\times 0,2^n \end{pmatrix}}$$

3. En déduire la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes.

Théorème 6

Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

De ce fait, ici $-1 < q = 0,2 < 1$ et d'après le théorème 6 :

$$\lim_{n\to+\infty} 0,2^n = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 75+75\times 0,2^n = 75 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 75-75\times 0,2^n = 75 \end{cases}$$

Ce qui nous donne la limite des suites (a_n) et (b_n) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 75 = \lim_{n\to+\infty} b_n}$$

Á long terme les deux programmes compteront <u>75 inscrits</u>.

Partie B

L'association affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1c_2c_3c_4c_5k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

- *on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9 ;*
- *on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k.*

Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsque le sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1. Dans cette question seulement, on choisit $a = 3$.

1. a. Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?

Avec le numéro 111383 on a : $\begin{cases} c_1 = 1 = c_2 = 1 = c_3 = 1 \ ; \ c_4 = 3 \ ; \ c_5 = 8 \\ k = 3 \end{cases}$.

Or le calcul de k est le suivant :

- on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où $a = 3$ soit :

$$S = 1 + 1 + 8 + 3 \times (1 + 3) = 22$$

- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k soit :

$$k \equiv 22 \mod 10 \equiv 2 \mod 10$$

La clé devrait donc être 2, le numéro 111383 ne peut pas être celui d'un enfant inscrit à l'association.

1. b. L'employé, confondant un frère et une soeur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08c_3c_4c_5k$ est transformé en $11c_3c_4c_5k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ?

Avec le numéro $08c_3c_4c_5k$ on a : $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 8 \end{cases}$, le calcul de k est le suivant :

- on effectue la somme : $S = 0 + c_3 + c_5 + 3 \times (8 + c_4) = c_3 + c_5 + 3c_4 + 24$
- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k soit puisque $24 \mod 10 = 4$:

$$k \equiv S \mod 10 \equiv \underline{c_3 + c_5 + 3c_4 + 4 \mod 10}$$

Avec le numéro $11c_3c_4c_5k$ on a : $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$, le calcul de k est le suivant :

- on effectue la somme : $S'' = 1 + c_3 + c_5 + 3 \times (1 + c_4) = c_3 + c_5 + 3c_4 + 4$
- on effectue la division euclidienne de S'' par 10, le reste obtenu est la clé k' soit puisque $4 \mod 10 = 4$:

$$k'' \equiv S'' \mod 10 \equiv \underline{c_3 + c_5 + 3c_4 + 4 \mod 10}$$

L'erreur ne sera donc pas détectée grâce à la clé puisque les deux sont identiques.

2. On note $c_1c_2c_3c_4c_5k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont intervertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.

2. a. Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $(a-1)(c_4 - c_3)$ est congru à 0 modulo 10.

On peut noter : $\begin{cases} S = c_1 + c_3 + c_5 + a(c_2 + c_4) \\ S' = c_1 + c_4 + c_5 + a(c_2 + c_3) \end{cases}$.

La clé ne détecte pas l'erreur d'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $S \equiv S' \mod 10$ donc on a :

$$\begin{aligned} S \equiv S' \mod 10 &\iff c_1 + c_3 + c_5 + ac_2 + ac_4 \equiv c_1 + c_4 + c_5 + ac_2 + ac_3 \mod 10 \\ &\iff c_3 + ac_4 \equiv c_4 + ac_3 \mod 10 \\ &\iff c_3 + ac_4 - c_4 - ac_3 \equiv 0 \mod 10 \\ &\iff \underline{(a-1)(c_4 - c_3) \equiv 0 \mod 10} \end{aligned}$$

2. b. Déterminer les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \mod 10$.

On peut dresser le tableau des restes de la division euclidienne de np par 10 pour n variant de 0 à 9 et p de 1 à 9 :

n/p	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$	$p=8$	$p=9$	Conclusion
$n=0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Tout entier naturel p
$n=1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$n=2$	2	4	6	8	0	2	4	6	8	$p=5$
$n=3$	3	6	9	2	5	8	1	4	7	
$n=4$	4	8	2	6	0	4	8	2	6	$p=5$
$n=5$	5	0	5	0	5	0	5	0	5	$p=2$ ou 4 ou 6 ou 8
$n=6$	6	2	8	4	0	6	2	8	4	$p=5$
$n=7$	7	4	1	8	5	2	9	6	3	
$n=8$	8	6	4	2	0	8	6	4	2	$p=5$
$n=9$	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

On constate que les nombres n qui admettent tous un entier p (au moins), compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0[10]$ sont les entiers n :

$$\boxed{0, 2, 4, 5, 6 \text{ et } 8}$$

2. c. En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.

Pour que l'erreur ne soit pas détectée il faut d'après la question (2.a.) que $(a-1)(c_4-c_3) \equiv 0 \mod 10$ et donc d'après la question (2.b.) il faut que $(a-1)$ appartienne à $\{0 ; 2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8\}$ soit $a \in \{1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9\}$.

Les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4 sont donc $a \in \{2 ; 4 ; 8\}$.

Fin du devoir