Math93.com

Baccalauréat 2017 - S Nouvelle Calédonie

Série S Obligatoire
Mars 2017
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal.

Partie A

1. Justifier toutes les informations du tableau de variations de f donné ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\text{e}}$	$\searrow$	0

- La fonction f est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont. Elle est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$u(x) = x$	$u'(x) = 1$
$v(x) = \text{e}^{-x}$	$u(x) = -\text{e}^{-x}$

Pour tout réel de $[0; +\infty[$ on a :

$$f'(x) = 1 \times \text{e}^{-x} + x \times \left(-\text{e}^{-x}\right) = \underline{(1-x)\,\text{e}^{-x}}$$

- La fonction exponentielle est strictement positif sur $\mathbb{R}$ donc f' est du signe du facteur $(1-x)$ sur $[0; +\infty[$ donc négative avant 1, nulle en 1 et positive après 1. La fonction f est donc croissante sur $[0\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.
- On obtient facilement $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{1}{\text{e}}$.
- Limite en $+\infty$.

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

– (1) : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{e}^x}{x} = +\infty$ | – (2) : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\text{e}^x = 0$ | – (3) : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{e}^x - 1}{x} = 1$

On a d'après le (1) du théorème :

$$\begin{cases} f(x) = x\,\text{e}^{-x} = \dfrac{x}{\text{e}^x} = \dfrac{1}{\dfrac{\text{e}^x}{x}} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{e}^x}{x} = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

2. Soit F la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$. Démontrer que la fonction F est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

La fonction F est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont. Elle est de la forme uv donc de dérivée $u'v+uv'$ avec :

$u(x) = -1-x$	$u'(x) = -1$
$v(x) = \mathrm{e}^{-x}$	$u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

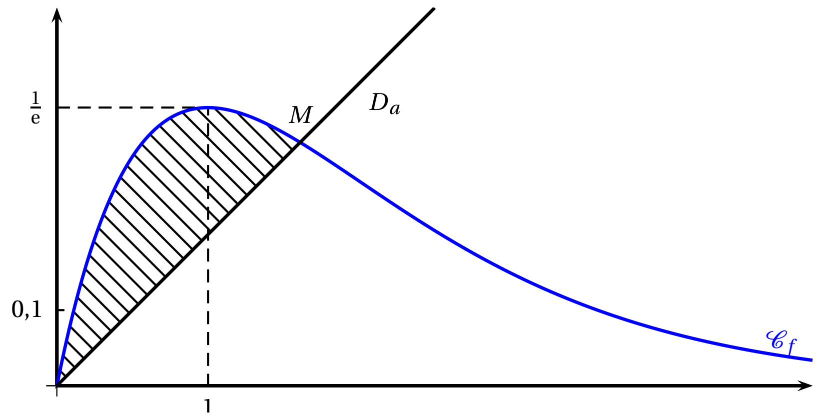
Pour tout réel de $[0;+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -1\times \mathrm{e}^{-x} + (-1-x)\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= \Big(-1-(-1-x)\Big)\times \mathrm{e}^{-x}\\ &= x\mathrm{e}^{-x}\\ F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Donc $F' = f$ ce qui prouve que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. On considère la droite D_a d'équation $y = ax$ et M le point d'intersection de la droite D_a avec la courbe $\mathscr{C}_f$. On note x_M l'abscisse du point M. On note $\mathscr{H}(a)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous, c'est-à-dire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ au-dessus de la droite D_a et entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = x_M$. Le but de cette partie est d'établir l'existence et l'unicité de la valeur de a telle que $\mathscr{H}(a) = 0,5$ puis d'étudier un algorithme.



1. Prouver que la droite D_a et la courbe $\mathscr{C}_f$ ont un unique point d'intersection M distinct de l'origine.

La droite D_a et la courbe $\mathscr{C}_f$ se coupent en des points dont les abscisses sont solutions (éventuelles) de l'équation $ax = x\mathrm{e}^{-x}$. Or on a :

$$\begin{aligned} ax = x\mathrm{e}^{-x} &\iff ax - x\mathrm{e}^{-x} = 0\\ &\iff x(a-\mathrm{e}^{-x}) = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } a-\mathrm{e}^{-x} = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou } a = \mathrm{e}^{-x}\\ &\iff x = 0 \text{ ou } \ln(a) = -x\\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -\ln(a) \end{aligned}$$

Donc la droite D_a et la courbe $\mathscr{C}_f$ se coupent au point O et en un autre point d'abscisse $\underline{-\ln(a)}$.

On admet dans la suite de l'exercice que le point M a pour abscisse $x_M = -\ln a$ et que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0\,;\,-\ln(a)]$.

2. Montrer que $\mathscr{H}(a) = a\ln(a) - \frac{1}{2}a(\ln(a))^2 + 1 - a$.

Pour a strictement compris entre 0 et 1, on admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[\![0\,;\,-\ln(a)]\!]$.
Donc pour tout réel de cet intervalle, la différence $(f(x) - ax)$ est positive.
La fonction $x \longmapsto (f(x) - ax)$ étant sur l'intervalle $[\![0\,;\,-\ln(a)]\!]$ définie, positive et continue, on peut affirmer que l'aire $\mathscr{H}(a)$ du domaine hachuré s'exprime , en unités d'aire par :

$$\int_0^{-\ln(a)} \left(f(x) - ax\right)\,\mathrm{d}x$$

On a donc pour tout $a \in\,]0\,;1[$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}(a) &= \int_0^{-\ln(a)} \left(f(x) - ax\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{-\ln(a)} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{-\ln(a)} ax\,\mathrm{d}x \quad \text{(par linéarité)} \\
&= \Big[F(x)\Big]_0^{-\ln(a)} - \left[a\frac{x^2}{2}\right]_0^{-\ln(a)} \\
&= \left[\Big(\ln(a) - 1\Big)\,\mathrm{e}^{-(-\ln(a))} - (-1)\,\mathrm{e}^{0}\right] - \left[a\frac{(\ln(a))^2}{2} - 0\right] \\
\mathscr{H}(a) &= \underline{a\ln(a) - a + 1 - \frac{1}{2}\,a\,(\ln(a))^2}
\end{aligned}$$

3. Soit la fonction $\mathscr{H}$ définie sur $]0\,;1]$ par $\mathscr{H}(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x(\ln(x))^2 + 1 - x$. On admet que $\mathscr{H}$ est dérivable sur $]0\,;1]$ et que son tableau de variations correspond à celui qui est proposé ci-dessous. Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0\,;1[$ tel que $\mathscr{H}(\alpha) = 0{,}5$.

x	0	α	1
Variations de $\mathscr{H}$	‖ 1 ↘	0.5 ↘	0

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- **Application du corollaire sur $]0\,;1]$** :
  - La fonction $\mathscr{H}$ est *continue* (car dérivable) et *strictement décroissante* sur l'intervalle $]0\,;1]$;
  - Le réel $k = 0.5$ est compris entre $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathscr{H}(x) = 1$ et $\mathscr{H}(1) = 0$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $\mathscr{H}(x) = 0.5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]0\,;1]$.

©ISSN 2272-5318

4. *On considère l'algorithme présenté ci-dessous.*

VARIABLES :	A, B et C sont des nombres ;
	p est un entier naturel.
INITIALISATION :	Demander la valeur de p
	A prend la valeur 0
	B prend la valeur 1
TRAITEMENT :	Tant que $B - A > 10^{-p}$
	C prend la valeur $(A+B)/2$
	Si $\mathcal{H}(C) > 0,5$
	Alors A prend la valeur de C
	Sinon B prend la valeur de C
	Fin de la boucle Si
	Fin de la boucle Tant que
SORTIE :	Afficher A et B.

Que représentent les valeurs A et B affichées en sortie de cet algorithme ?
Cet algorithme, dit de « *dichotomie* », permet de déterminer un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-p} de la solution de l'équation $\mathcal{H}(x) = 0,5$.
Le nombre A est la borne inférieure de l'encadrement, le nombre B en est la borne supérieure.

5. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α.
Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{H}(0,06) & \approx & 0,534 > 0,5 \\ \mathcal{H}(0,07) & \approx & 0,496 < 0,5 \end{array}\right| , \text{ donc } \underline{0,06 < \alpha < 0,07}.$$

Exercice 2. Vrai ou Faux — 3 points

Commun à tous les candidats

Répondre à chacune des affirmations ci-dessous par Vrai ou Faux en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

- **Affirmation 1 : La durée de vie T (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$. On sait qu'un tel appareil a une durée de vie moyenne de quatre ans. La probabilité que cet appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il a déjà fonctionné trois ans est d'environ $0,39$ à $0,01$ près.**

Propriété 2

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leq a \leq b$:

$$P(a \leq T \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P(T \leq b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geq a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

En outre la variable T est d'espérance : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Propriété 3 (Durée de vie sans vieillissement)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h :

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$$

Cette propriété traduit le fait que la loi exponentielle est « sans mémoire ».

- La durée de vie T (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$. Or on sait qu'un tel appareil a une durée de vie moyenne $E(T)$ de quatre ans donc on a :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = 4 \iff \lambda = \frac{1}{E(T)} = 0,25$$

- D'après le cours, si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors :

$$P(X < t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

- On cherche la probabilité que cet appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il a déjà fonctionné trois ans ce qui se traduit par : $P_{(T \geqslant 3)}(T \geqslant 3 + 2)$.
  La loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement d'après la propriété 3 donc :

$$P_{(T \geqslant 3)}(T \geqslant 3 + 2) = P(T \geqslant 2)$$

  De ce fait :

$$\begin{aligned} P_{(T \geqslant 3)}(T \geqslant 3 + 2) &= P(T \geqslant 2) \\ &= 1 - P(T < 2) \\ &= 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,25 \times 2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-0,25 \times 2} \\ P_{(T \geqslant 3)}(T \geqslant 3 + 2) &\approx 0,61 \neq 0,39 \end{aligned}$$

- <u>Conclusion</u> : Cette affirmation est **fausse**.

- **Affirmation 2** : **Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. L'équation $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$ admet trois solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, qui sont les affixes de trois points formant un triangle équilatéral.**

  – On va résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$.

$$\begin{aligned} z^3 - 3z^2 + 3z = 0 &\iff z\left(z^2 - 3z + 3\right) = 0 \\ &\iff \left(Z = 0\right) \text{ ou } \left(z^2 - 3z + 3 = 0\right) \end{aligned}$$

  – On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 - 3z + 3 = 0$.
  Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 9 - 12 = -3$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

  – Soit A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2.

    - $OA = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$ u.l.
    - $OB = |z_2| = |z_1|$ car z_1 et z_2 sont deux nombres complexes conjugués, donc $OB = \sqrt{3}$ u.l..
    - $AB = |z_2 - z_1| = \left|\frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} - \frac{3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right| = \left|-\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$ u.l.

  – On a $OA = OB = AB = \sqrt{3}$ u.l. donc les trois solutions de l'équation (E) sont les affixes de trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

  – Conclusion : Cette affirmation est **vraie**.

Exercice 3. Probabilités 4 points

Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Des étudiants d'une université se préparent à passer un examen pour lequel quatre thèmes (A, B, C et D) sont au programme.

Partie A

Sur les 34 sujets de l'examen déjà posés, 22 portaient sur le thème A. Peut-on rejeter au seuil de 95 % l'affirmation suivante : « *il y a une chance sur deux que le thème A soit évalué le jour de l'examen* » ?

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 34$ sujets d'examen. Il est constaté que 22 d'entre eux sont du thème A. ». Donc la fréquence observée sujets d'examen du thème A est
  $$f = 22 \div 34 \approx 0{,}647058823 \text{ soit } \underline{f = 0{,}647}$$
  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion de sujets d'examen du thème A est $\underline{p = 50\%}$ ».
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 2 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 34$, $p = 50$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 34 \geq 30 \\ \checkmark & np = 34 \times 0{,}5 = 17 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 34 \times 0{,}5 = 17 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}5 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{34}}\ ;\ 0{,}5 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{34}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}33193$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}331}$.
- $p + 1{,}96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}66807$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}669}$.

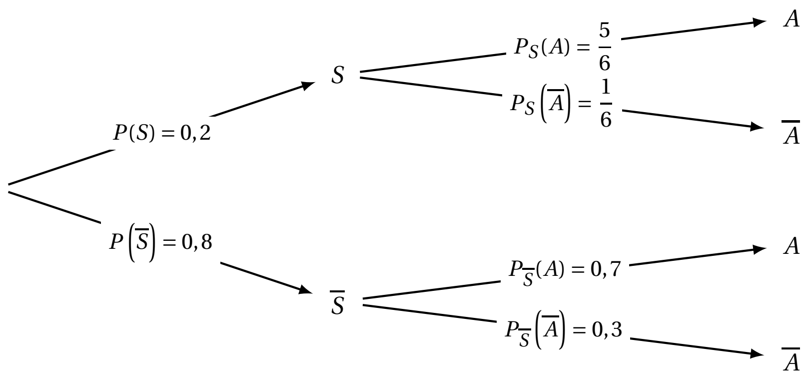
$$\boxed{I_{34} \approx [0{,}331\ ;\ 0{,}669]}$$

- **Conclusion**
La fréquence observée appartient à l'intervalle, $f = 0{,}647 \in I$ donc le résultat du contrôle ne remet pas en question l'hypothèse, au seuil de 95%.

Partie B

Le thème A reste pour beaucoup d'étudiants une partie du programme difficile à maîtriser. Un stage de préparation est alors proposé pour travailler ce thème. Lors des résultats de l'examen, un étudiant s'exclame : « Je n'ai pas du tout traité le thème A ». Quelle est la probabilité que cet étudiant ait suivi le stage ? On arrondira le résultat à $0,001$ *près.*

- Résumons le données dans un arbre en notant S l'évènement « l'étudiant a suivi le stage » et A l'évènement « l'étudiant a traité le thème A ».
  - « Lors de l'examen, on a constaté que s'il y a un exercice portant sur le thème A : 30 % des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice » donc $P_{\overline{S}}\left(\overline{A}\right) = 0,3$;
  - « $\dfrac{5}{6}$ des étudiants ayant suivi le stage l'ont traité » donc $P_S(A) = \dfrac{5}{6}$;
  - « On sait de plus que 20 % des étudiants participent au stage » donc $P(S) = 0,2$.
  - On complète ensuite l'arbre sachant que le total des probabilités sur les branches d'un même noeud est 1.



- On cherche la probabilité que cet étudiant qui n'a pas traité le thème A ait suivi le stage, ce qui avec les notations proposées se traduit par : $P_{\overline{A}}(S)$. Or on a la relation :

$$P_{\overline{A}}(S) = \frac{P\left(\overline{A} \cap S\right)}{P\left(\overline{A}\right)}$$

  - Calcul de $P\left(\overline{A} \cap S\right)$.

$$P\left(\overline{A} \cap S\right) = P(S) \times P_S\left(\overline{A}\right) = 0,2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

  - Calcul de $P\left(\overline{A}\right)$.
    Les évènements S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A}\right) &= P\left(S \cap \overline{A}\right) + P\left(\overline{S} \cap \overline{A}\right) \\ &= P(S) \times P_S\left(\overline{A}\right) + P\left(\overline{S}\right) \times P_{\overline{S}}\left(\overline{A}\right) \\ &= 0,2 \times \frac{1}{6} + 0,8 \times 0,3 \\ P\left(\overline{A}\right) &= \frac{41}{150} \end{aligned}$$

- On a donc en gardant les valeurs exactes :

$$\begin{aligned} P_{\overline{A}}(S) &= \frac{P\left(\overline{A} \cap S\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{41}{150}} \\ &= \frac{1}{30} \times \frac{150}{41} = \frac{5}{41} \\ P_{\overline{A}}(S) &\approx \underline{0,122} \end{aligned}$$

- Conclusion : la probabilité que cet étudiant qui n'a pas traité le thème A ait suivi le stage est, arrondie au millième de $0,122$.

Partie C

On suppose que la variable aléatoire T, associant la durée (exprimée en minutes) que consacre un étudiant de cette université pour la composition de cet examen, suit la loi normale d'espérance $\mu = 225$ et d'écart-type σ où $\sigma > 0$. La probabilité qu'un étudiant finisse son examen en moins de 235 minutes est de $0,98$.
Déterminer une valeur approchée de σ à $0,1$ près.
$\big($*On pourra, par exemple, introduire la variable aléatoire* $Z = \frac{T-225}{\sigma}\big)$.

Propriété 4

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire T suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Z = \dfrac{T-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Donc ici, puisque T suit la loi normale $\mathcal{N}\left(225\,;\,\sigma^2\right)$, la v.a. $Z = \dfrac{T-225}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
On cherche ici une valeur approchée à 10^{-1} de σ sachant que $P(T \leqslant 235) = 0,98$, or :

$$\begin{aligned} P(T \leqslant 235) = 0,98 &\iff P\left(\frac{T-225}{\sigma} \leqslant \frac{235-225}{\sigma}\right) = 0,98 \\ &\iff P\left(Z \leqslant \frac{10}{\sigma}\right) = 0,98 \end{aligned}$$

Or la v.a. Z suit la loi normale centrée réduite.
La calculatrice nous donne alors avec la fonction répartition normale réciproque :

$$Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1) \Longrightarrow \frac{10}{\sigma} \approx 2,054$$

Une valeur approchée de σ arrondie à 10^{-1} près est donc : $\sigma \approx \dfrac{10}{2.054} \approx \underline{4,9}$.

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0,98\,,\,0\,,\,1) \approx \underline{2,054}$
- *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0,98\,,\,0\,,\,1)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0,98\,,\,0\,,\,1)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0,98\,,\,1\,,\,0)$

Exercice 4. 3 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$ *pour tout entier naturel* $n \geqslant 0$.

On obtient à l'aide d'un tableur les premiers termes de cette suite :

Prouver que la suite (u_n) converge.

	A	B	C
1		u_n	u_n
2	n	(en valeurs exactes)	(en valeurs approchées)
3	0	0	0
4	1	1/2	0,5
5	2	2/3	0,666 666 667
...	...	...	...
12	9	9/10	0,9
13	10	10/11	0,909 090 909

- On va déterminer le terme général de la suite (u_n).
  On peut conjecturer que, pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
  Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout n.
  - **Initialisation**
    Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $\dfrac{n}{n+1} = 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
  - **Hérédité**
    On suppose que la propriété est vraie pour un entier k quelconque : $u_k = \dfrac{k}{k+1}$.
    On va démontrer qu'elle est vraie au rang $k+1$ soit $u_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{2-u_k} = \frac{1}{2-\dfrac{k}{k+1}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{2(k+1)-k}{k+1}} = \frac{k+1}{2k+2-k} \\ u_{k+1} &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

    Donc la propiété est vraie au rang $k+1$.
  - **Conclusion**
    La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire pour tout n. Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

  On peut donc dire que, pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
- Calculons la limite de la suite.
  Pour $n \neq 0$ on a

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n \times 1}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$$

  Donc par composition :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

- Conclusion : la suite (u_n) tend vers 1.

Exercice 5. 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J, K).
On considère les points : A(−1 ; −1 ; 0), B(6 ; −5 ; 1), C(1 ; 2 ; −2) et S(13 ; 37 ; 54).

1.

1. a. Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

$$\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont clairement pas proportionnelles.

$$\frac{7}{2} \neq \frac{-4}{3}$$

Les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent bien un plan dont $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont deux vecteurs directeurs.

1. b. Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

> **Théorème 3**
>
> Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ non colinéaires de ce plan.

Donc d'après le théorème 3 on a :

$$\overrightarrow{n} \text{ normal à (ABC)} \iff \begin{cases} \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

Or en calculant les produits scalaires on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix} . \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix} = 5\times7+16\times(-4)+29\times1 = 0 \\ \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix} . \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} = 5\times2+16\times3+29\times(-2) = 0 \end{cases}$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

1. c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

Propriété 5

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{u}\ = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} . \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a(x-x_A)+b\left(y-y_A\right)+c(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 5 :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ z-0 \end{pmatrix} . \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix} = 0$$

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (ABC) \iff 5(x+1)+16(y+1)+29(z-0)=0$$

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (ABC) \iff 5x+5+16y+16+29z=0$$

$$\boxed{(ABC)\ \ :\ \ 5x+16y+29z+21=0}$$

2.

2. a. Déterminer la nature du triangle ABC.
On est dans un repère orthonormé donc le calcul de distances est légitime avec la formule usuelle. Soit :

$$\begin{cases} \text{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|^2 = 7^2+(-4)^2+1^2 = 49+16+1=66 \\ \text{AC}^2 = \left\|\overrightarrow{\text{AC}}\right\|^2 = 2^2+3^2+(-2)^2 = 4+9+4=17 \\ \text{BC}^2 = (1-6)^2+(2+5)^2+(-2-1)^2 = 25+49+9=83 \end{cases}$$

D'où

- d'une part : $AB^2+AC^2=66+17=83$;
- d'autre part : $BC^2=83$

On a alors l'égalité $\text{AB}^2+\text{AC}^2=\text{BC}^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

2. b. Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unités d'aire, $\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$.
Le triangle ABC est rectangle en A donc son aire vaut :

$$\mathscr{A} = \frac{\text{AB}\times\text{AC}}{2} = \frac{\sqrt{66}\times\sqrt{17}}{2}$$

Donc

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{\sqrt{1122}}{2}\ \text{u.a.}}$$

3.

3. a. Prouver que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
Pour cela il suffit de prouver que le point $S(13\ ;\ 37\ ;\ 54)$ n'appartient pas au plan (ABC) et donc que ses coordonnées ne vérifient pas son équation cartésienne $(ABC)\ \ :\ \ 5x+16y+29z+21=0$. On a :

$$\text{Avec}\ \begin{cases} x=13 \\ y=37 \\ z=54 \end{cases}\ ;\ \ 5x+16y+29z+21 = 5\times13+16\times37+29\times54+21 = 2244 \neq 0$$

Donc les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

©ISSN 2272-5318

3. b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S coupe le plan (ABC) en un point noté H. Déterminer les coordonnées du point H.

La droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$, normal au plan (ABC), est un vecteur directeur de (Δ). Le vecteur $\overrightarrow{\text{SH}}$ est de ce fait colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ ce qui peut se traduire en notant $H\left(x_H\ ;\ y_H\ ;\ z_H\right)$ par l'existence d'un réel k tel que :

$$\overrightarrow{SH}\begin{pmatrix}x_H-13\\y_H-37\\z_H-54\end{pmatrix}=k\times\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x_H-13=5k\\y_H-37=16k\\z_H-54=29k\end{cases}\iff\begin{cases}x_{\text{H}}&=&13+5k\\y_{\text{H}}&=&37+16k\\z_{\text{H}}&=&54+29k\end{cases}$$

On exprime alors le fait que H appartient au plan (ABC), ce qui va permettre de déterminer la valeur de k :

$$\begin{aligned}5x_{\text{H}}+16y_{\text{H}}+29z_{\text{H}}+21=0&\iff 5(13+5k)+16(37+16k)+29(54+29k)+21=0\\&\iff 65+25k+592+256k+1\,566+841k+21=0\\&\iff 2\,244+1\,122k=0\\&\iff k=-2\end{aligned}$$

Donc le point H a pour coordonnées :

$$\begin{cases}x_{\text{H}}&=&13+5(-2)&=&3\\y_{\text{H}}&=&37+16(-2)&=&5\\z_{\text{H}}&=&54+29(-2)&=&-4\end{cases}$$

4. Déterminer le volume du tétraèdre SABC.

Dans le repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J\ ;\ K)$ le calcul de longueurs avec les formules usuelles est légitime :

$$\left\{\begin{array}{l}S(13\ ;\ 37\ ;\ 54)\\H(3\ ;\ 5\ ;\ -4)\end{array}\right|\Longrightarrow\overrightarrow{HS}\begin{pmatrix}10\\32\\50\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\|\overrightarrow{HS}\right\|=HS=\sqrt{(10)^2+(32)^2+(58)^2}=2\sqrt{1122}\text{ u.l.}$$

Le volume du tétraèdre SABC est donné par la formule :

$$\frac{\text{aire(ABC)}\times\text{SH}}{3}$$

Or d'après la question **(2.b.)** on sait que :

$$\text{aire(ABC)}=\frac{\sqrt{1\,122}}{2}\text{ u.a.}$$

Donc le volume du tétraèdre est :

$$\mathcal{V}=\frac{\dfrac{\sqrt{1\,122}}{2}\times2\sqrt{1\,122}}{3}=\frac{1\,122}{3}=\underline{374\text{ u.v.}}$$

Fin du devoir