Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2017

EXERCICE 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Partie A

1. On justifie les informations du tableau de variations de f donné ci-dessous :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

- La dérivée de f est $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
  Pour tout s, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$, donc $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$, et elle est strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
- $f(0) = 0$
- On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.
  $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$; on sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Soit F la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
$F'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1)(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (-1+x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = x\,\mathrm{e}^{-x} = f(x)$
Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

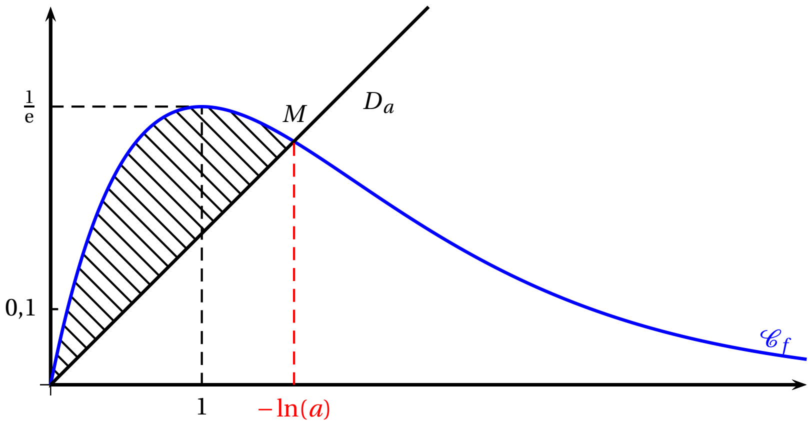
Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. On considère la droite D_a d'équation $y = ax$ et M le point d'intersection de la droite D_a avec la courbe $\mathscr{C}_f$. On note x_M l'abscisse du point M.
On note $\mathscr{H}(a)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous, c'est-à-dire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ au-dessus de la droite D_a et entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = x_M$.

1. La droite D_a et la courbe $\mathscr{C}_f$ se coupent en des points dont les abscisses sont solutions de l'équation $ax = x\,\mathrm{e}^{-x}$. On résout cette équation :

$$ax = x\,\mathrm{e}^{-x} \iff ax - x\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff x(a - \mathrm{e}^{-x}) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } a - \mathrm{e}^{-x} = 0 \iff x = 0 \text{ ou } a = \mathrm{e}^{-x}$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } \ln(a) = -x \iff x = 0 \text{ ou } x = -\ln(a)$$

Donc la droite D_a et la courbe $\mathscr{C}_f$ se coupent au point O et en un autre point d'abscisse $-\ln(a)$.

On admet dans la suite de l'exercice que le point M a pour abscisse $x_M = -\ln(a)$ et que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0\,;\,-\ln(a)]$.



2. La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0\,;\,-\ln(a)]$, donc l'aire $\mathscr{H}(a)$ du domaine hachuré est $\displaystyle\int_0^{-\ln(a)}\big(f(x)-ax\big)\,\mathrm{d}x$.

$$\mathscr{H}(a)=\int_0^{-\ln(a)}\big(f(x)-ax\big)\,\mathrm{d}x=\int_0^{-\ln(a)}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{-\ln(a)}ax\,\mathrm{d}x=\Big[F(x)\Big]_0^{-\ln(a)}-\left[a\frac{x^2}{2}\right]_0^{-\ln(a)}$$

$$=\left[(\ln(a)-1)\,\mathrm{e}^{-(-\ln(a))}-(-1)\,\mathrm{e}^0\right]-\left[a\frac{(\ln(a))^2}{2}-0\right]=a\ln(a)-a+1-\frac{1}{2}a(\ln(a))^2$$

3. Soit la fonction $\mathscr{H}$ définie sur $]0\,;\,1]$ par $\mathscr{H}(x)=x\ln(x)-\frac{1}{2}x(\ln(x))^2+1-x$.

On admet que $\mathscr{H}$ est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et que son tableau de variations correspond à celui qui est proposé ci-dessous.

x	0	1
$\mathscr{H}(x)$	1 ↘	0

La fonction $\mathscr{H}$ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,1]$. D'après le tableau de variations, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\mathscr{H}(x)=1$ et $\mathscr{H}(1)=0$. Or $0{,}5\in\,]0\,;\,1[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\mathscr{H}(x)=0{,}5$ admet une solution unique α dans $]0\,;\,1[$.

4. On considère l'algorithme présenté ci-dessous.

```
VARIABLES :        A, B et C sont des nombres ;
                   p est un entier naturel.
INITIALISATION :   Demander la valeur de p
                   A prend la valeur 0
                   B prend la valeur 1
TRAITEMENT :       Tant que B − A > 10^(−p)
                     | C prend la valeur (A + B)/2
                     | Si H(C) > 0,5
                     |    | Alors A prend la valeur de C
                     |    | Sinon B prend la valeur de C
                     | Fin de la boucle Si
                   Fin de la boucle Tant que
SORTIE :           Afficher A et B.
```

Cet algorithme, dit de « dichotomie », permet de déterminer un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-p} de la solution de l'équation $\mathcal{H}(x) = 0{,}5$; le nombre A est la borne inférieure de l'encadrement, le nombre B en est la borne supérieure.

5. On utilise la calculatrice pour déterminer les encadrements suivants :

$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathcal{H}(x) = 1\\ \mathcal{H}(0{,}1) \approx 0{,}40 < 0{,}5\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in \left]0\,;\,0{,}1\right[$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l}\mathcal{H}(0{,}06) \approx 0{,}534 > 0{,}5\\ \mathcal{H}(0{,}07) \approx 0{,}496 < 0{,}5\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in \left]0{,}06\,;\,0{,}07\right[$

EXERCICE 2 Commun à tous les candidats 3 points

1. La durée de vie T (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$.

On sait qu'un tel appareil a une durée de vie moyenne $E(T)$ de quatre ans ; or $\lambda = \dfrac{1}{E(T)}$ donc $\lambda = 0{,}25$.

D'après le cours, si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $P(X < t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

On cherche $P_{(T\geqslant 3)}(T \geqslant 3+2)$.

La loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement donc $P_{(T\geqslant 3)}(T \geqslant 3+2) = P(T \geqslant 2)$.

$P(T \geqslant 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}25\times 2}\right) = \mathrm{e}^{-0{,}25\times 2} \approx 0{,}61 \neq 0{,}39$.

Cette affirmation est **fausse**.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

On résout dans $\mathbf{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$.

$z^3 - 3z^2 + 3z = z(z^2 - 3z + 3)$ donc (E) $\iff z(z^2 - 3z + 3) = 0 \iff z = 0$ ou $z^2 - 3z + 3 = 0$

On résout dans $\mathbf{C}$ l'équation (E') : $z^2 - 3z + 3 = 0$: $\Delta = 9 - 12 = -3$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Soit A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2.

- $\mathrm{OA} = |z_1| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$
- $\mathrm{OB} = |z_2| = |z_1|$ car z_1 et z_2 sont deux nombres complexes conjugués, donc $\mathrm{OB} = \sqrt{3}$.
- $\mathrm{AB} = |z_2 - z_1| = \left|\dfrac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right| = \left|-\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

OA = OB = AB donc les trois solutions de l'équation (E) sont les affixes de trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Cette affirmation est **vraie**.

EXERCICE 3 Commun à tous les candidats 4 points

Des étudiants d'une université se préparent à passer un examen pour lequel quatre thèmes (A, B, C et D) sont au programme.

Partie A

Sur les 34 sujets de l'examen déjà posés, 22 portaient sur le thème A.
On veut tester l'hypothèse « il y a une chance sur deux ($p = 0,5$) que le thème A soit évalué le jour de l'examen » dans un échantillon de taille $n = 34$.
$n = 34 \geqslant 30$ et $np = n(1-p) = 17 \geqslant 5$ donc les conditions sont vérifiées pour que l'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion que le thème A soit évalué le jour de l'examen :
$I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,5 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{34}}\ ;\ 0,5 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{34}}\right] \approx [0,33\ ;\ 0,67]$
La fréquence dans l'échantillon est de $f = \dfrac{22}{34} \approx 0,65 \in I$ donc il n'y a pas de raison de rejeter l'affirmation proposée.

Partie B

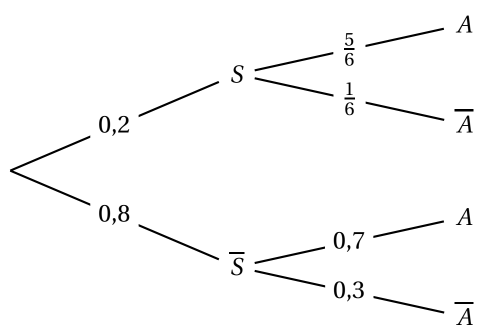
Le thème A reste pour beaucoup d'étudiants une partie du programme difficile à maîtriser. Un stage de préparation est alors proposé pour travailler ce thème.
Lors de l'examen, on a constaté que s'il y a un exercice portant sur le thème A :

- 30 % des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice ;
- $\dfrac{5}{6}$ des étudiants ayant suivi le stage l'ont traité.

On sait de plus que 20 % des étudiants participent au stage.
On note :

- S l'évènement « l'étudiant a suivi le stage » et $\overline{S}$ son évènement contraire ;
- A l'évènement « il y a un exercice portant sur le thème A » et $\overline{A}$ son évènement contraire.

On établit un arbre de probabilité résumant la situation :



On cherche $P_{\overline{A}}(S)$ c'est-à-dire $\dfrac{P(S\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}$.
D'après l'arbre : $P(S\cap\overline{A}) = P(S)\times P_S(\overline{A}) = 0,2\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{0,2}{6} = \dfrac{1}{30}$.
D'après la formule des probabilités totales : $P(\overline{A}) = P(S\cap\overline{A}) + P(\overline{S}\cap\overline{A}) = \dfrac{1}{30} + 0,8\times 0,3 = \dfrac{1}{30} + \dfrac{24}{100} = \dfrac{41}{150}$.
$P_{\overline{A}}(S) = \dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{41}{150}} = \dfrac{1}{30}\times\dfrac{150}{41} = \dfrac{5}{41} \approx 0,122$.

Partie C

On suppose que la variable aléatoire T, associant la durée (exprimée en minutes) que consacre un étudiant de cette université pour la composition de cet examen, suit la loi normale d'espérance $\mu = 225$ et d'écart-type σ où $\sigma > 0$. La probabilité qu'un étudiant finisse son examen en moins de 235 minutes est de 0,98.

On sait que $P(T \leqslant 235) = 0{,}98$ sachant que T suit la loi normale de moyenne 225 et d'écart-type σ.

D'après le cours, si T suit la loi normale de moyenne 225 et d'écart-type σ, alors $Z = \dfrac{T-225}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite (moyenne 0 et écart-type 1).

$T \leqslant 235 \iff T - 225 \leqslant 10 \iff \dfrac{T-225}{\sigma} \leqslant \dfrac{10}{\sigma}$ car $\sigma > 0$; donc $P(T \leqslant 235) = 0{,}98 \iff P\left(\dfrac{T-225}{\sigma} \leqslant \dfrac{10}{\sigma}\right) = 0{,}98$.

On cherche donc le réel β tel que $P(Z \leqslant \beta) = 0{,}98$ sachant que Z suit la loi normale centrée réduite.

On trouve à la calculatrice $\beta \approx 2{,}054$.

On en déduit que $\dfrac{10}{\sigma} \approx 2{,}054$ donc que $\sigma \approx 4{,}9$.

EXERCICE 4 Commun à tous les candidats 3 points

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2-u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 0. \end{cases}$.

On peut conjecturer que, pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout n.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $\dfrac{n}{n+1} = 0$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité**
  On suppose que la propriété est vraie pour un entier k quelconque : $u_k = \dfrac{k}{k+1}$.

  On va démontrer qu'elle est vraie au rang $k+1$ soit $u_{k+1} = \dfrac{k+1}{k+2}$.

  $u_{k+1} = \dfrac{1}{2-u_k} = \dfrac{1}{2-\dfrac{k}{k+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{2(k+1)-k}{k+1}} = \dfrac{k+1}{2k+2-k} = \dfrac{k+1}{k+2}$

  Donc la propiété est vraie au rang $k+1$.
- **Conclusion**
  La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire pour tout n. Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On peut donc dire que, pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

On cherche $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Pour $n \neq 0$: $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n \times 1}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 5 — Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J, K).
On considère les points A(−1 ; −1 ; 0), B(6 ; −5 ; 1), C(1 ; 2 ; −2) et S(13 ; 37 ; 54).

1. a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$; $7\times\dfrac{2}{7}=2$ et $-4\times\dfrac{2}{7}\neq 3$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent bien un plan dont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs.

b. Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB}=5\times7+16\times(-4)+29\times1=35-64+29=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC}=5\times2+16\times3+29\times(-2)=10+48-58=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{AC}$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.
Si M a pour coordonnées $(x~;~y~;~z)$, alors $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x+1~;~y+1~;~z)$.
$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{n}\iff\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0\iff 5(x+1)+16(y+1)+29z=0\iff 5x+16y+29z+21=0$
Le plan (ABC) a pour équation $5x+16y+29z+21=0$.

2. a. $AB^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=7^2+(-4)^2+1^2=49+16+1=66$

$AC^2=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=2^2+3^2+(-2)^2=4+9+4=17$

$BC^2=(1-6)^2+(2+5)^2+(-2-1)^2=25+49+9=83$

$66+17=83$ ce qui équivaut à $AB^2+AC^2=BC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

b. Le triangle ABC est rectangle en A donc son aire vaut $\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{\sqrt{66}\times\sqrt{17}}{2}=\dfrac{\sqrt{1\,122}}{2}$.

3. a. Les points A, B, C et S sont coplanaires si et seulement si le point S appartient au plan (ABC).
Le plan (ABC) a pour équation $5x+16y+29z+21=0$.
$5x_S+16y_S+29z_S+21=5\times13+16\times37+29\times54+21=1\,705\neq0$ donc $S\notin(ABC)$.
Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par S coupe le plan (ABC) en un point noté H.
La droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$. Donc le vecteur $\overrightarrow{SH}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ donc le vecteur $\overrightarrow{SH}$ a pour coordonnées $(5k~;~16k~;~29k)$ où k est un réel. Si le point H a pour coordonnées $(x_H~;~y_H~;~z_H)$, le vecteur $\overrightarrow{SH}$ a pour coordonnées $(x_H-13~;~y_H-37~;~z_H-54)$.

On en déduit : $\left\{\begin{array}{rcl}x_H&=&13+5k\\y_H&=&37+16k\\z_H&=&54+29k\end{array}\right.$

On exprime que H appartient au plan (ABC), ce qui va permettre de déterminer la valeur de k :

$$\begin{aligned}5x_H+16y_H+29z_H+21=0&\iff 5(13+5k)+16(37+16k)+29(54+29k)+21=0\\&\iff 65+25k+592+256k+1\,566+841k+21=0\\&\iff 2\,244+1\,122k=0\iff k=-2\end{aligned}$$

Donc le point H a pour coordonnées : $\left\{\begin{array}{rcrcr}x_H&=&13+5(-2)&=&3\\y_H&=&37+16(-2)&=&5\\z_H&=&54+29(-2)&=&-4\end{array}\right.$

4. Le volume du tétraèdre SABC est $\dfrac{\text{aire(ABC)} \times \text{SH}}{3}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\text{SH}}$ a pour coordonnées $(5k\ ;\ 16k\ ;\ 29k)$ donc $(5(-2)\ ;\ 16(-2)\ ;\ 29(-2)) = (-10\ ;\ -32\ ;\ -58)$.
Donc $\text{SH}^2 = (-10)^2 + (-32)^2 + (-58)^2 = 4\,488$ et donc $\text{SH} = \sqrt{4\,488} = 2\sqrt{1\,122}$.

$\text{aire(ABC)} = \dfrac{\sqrt{1\,122}}{2}$ donc le volume du tétraèdre est $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1\,122}}{2} \times 2\sqrt{1\,122}}{3} = \dfrac{1\,122}{3} = 374$ unités de volume.