

∞ Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane ∞
Septembre 2015

EXERCICE 1

Commun à tous les candidats

6 points

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} par $f_n(x) = x^2 e^{-2nx}$

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$.

On admet que f_1 est dérivable sur \mathbb{R} et on note f_1' sa dérivée.

a. $f_1'(x) = 2x \times e^{-2x} + x^2 \times (-2)e^{-2x} = 2xe^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} = 2xe^{-2x}(1-x)$

- b. Pour déterminer les variations de la fonction f_1 , on étudie le signe de f_1' sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
e^{-2x}	+	+	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$f_1'(x)$	-	0	+	-

Donc la fonction f_1 est strictement décroissante sur les intervalles $] -\infty; 0]$ et $[1; +\infty[$, et elle est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

- c. On calcule la limite de f_1 en ∞ :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty \\ \text{On pose } X = -2x \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-2x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty$$

- d. Pour tout réel x , $f_1(x) = x^2 e^{-2x} = x^2 (e^{-x})^2 = (xe^{-x})^2 = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$

2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée

par $F_1(x) = -e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right)$.

F_1 est une primitive de f_1 donc :

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = F_1(1) - F_1(0) = \left(-e^{-2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \right) - \left(-e^0 \left(0 + 0 + \frac{1}{4} \right) \right) = -\frac{5e^{-2}}{4} + \frac{1}{4}$$

Partie B : Étude de la suite (I_n)

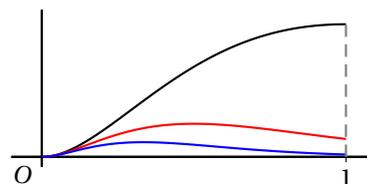
1. Soit n un entier naturel non nul.

a. $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^2 e^{-2nx} dx$

Sur $[0; 1]$, $x^2 \geq 0$ et $e^{-2nx} > 0$ donc $f_n(x) \geq 0$

On en déduit que I_n représente, en unités d'aire, l'aire du domaine défini par l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ telles que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f_n(x)$.

b. Si on trace sur une calculatrice les représentations graphiques des fonctions f_1 , f_2 et f_3 , on voit que sur $[0; 1]$, $f_1(x) > f_2(x) > f_3(x) > 0$.
Les intégrales entre 0 et 1 sont rangées dans le même ordre que les fonctions donc la suite (I_n) semble décroissante et semble tendre vers 0.



2. a. $f_{n+1}(x) = x^2 e^{-2(n+1)x} = x^2 e^{-2nx-2x} = x^2 e^{-2nx} \times e^{-2x} = e^{-2x} f_n(x)$

b. $x \in [0; 1] \iff 0 \leq x \leq 1 \iff -2 \leq -2x \leq 0 \iff e^{-2} \leq e^{-2x} \leq e^0 \implies e^{-2x} \leq 1$

Sur $[0; 1]$ $\left. \begin{array}{l} f_n(x) \geq 0 \\ e^{-2x} \leq 1 \end{array} \right\} \implies e^{-2x} f_n(x) \leq f_n(x) \iff f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

c. Sur $[0; 1]$ et pour tout $n \geq 1$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \text{ ou autrement dit } I_{n+1} \leq I_n.$$

La suite (I_n) est donc décroissante.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a. Sur $[0; 1]$, $0 \leq x^2 \leq 1$ donc, en multipliant par $e^{-2x} > 0$, on obtient $0 \leq x^2 e^{-2nx} \leq e^{-2nx}$ autrement dit : $0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}$

b. $0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 e^{-2nx} dx \iff 0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-2nx} dx$$

La fonction $x \mapsto e^{-2nx}$ a pour primitive la fonction $x \mapsto -\frac{e^{-2nx}}{2n}$.

$$\text{Donc } \int_0^1 e^{-2nx} dx = \left[-\frac{e^{-2nx}}{2n} \right]_0^1 = -\frac{e^{-2n}}{2n} + \frac{1}{2n}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-2n}}{2n} = 0 \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0 \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-2n}}{2n} + \frac{1}{2n} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^{-2nx} dx = 0$$

On sait que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-2nx} dx$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^{-2nx} dx = 0$; donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

EXERCICE 2**Commun à tous les candidats****5 points**

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x , où x est un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.

Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

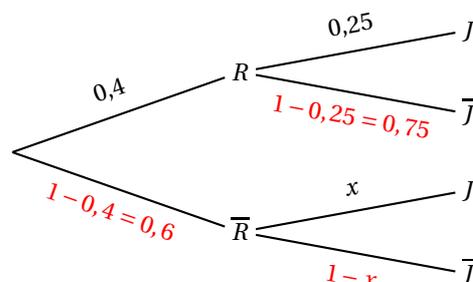
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :

R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;

J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. On sait que 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus » donc $P(J) = 0,2$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(J) = P(R \cap J) + P(\bar{R} \cap J) = P(R) \times P_R(J) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(J) = 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times x = 0,1 + 0,6x$$

$$\left. \begin{array}{l} P(J) = 0,2 \\ P(J) = 0,1 + 0,6x \end{array} \right\} \Rightarrow 0,2 = 0,1 + 0,6x \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».

$$\text{C'est une bouteille de jus d'orange avec la probabilité } P_J(R) = \frac{P(R \cap J)}{P(J)} = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2}$$

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. On prend au hasard une bouteille dans un lot de 500 ; il n'y a que deux issues possibles : elle est « pur jus » avec une probabilité égale à $p = 0,2$ ou elle ne l'est pas avec la probabilité $1 - p = 0,8$.

On répète de façon indépendante 500 fois cette épreuve donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bouteilles « pur jus » suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,2$.

2. On cherche $P(X \geq 75)$ qui est égal à $1 - P(X \leq 74)$.

À la calculatrice on trouve $P(X \leq 74) \approx 0,0016$ ce qui donne 0,998 pour la probabilité cherchée.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

1. Un intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 % est donné par :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

sous les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Or $p = 0,9$ et $n = 900 \geq 30$, donc $np = 810 \geq 5$ et $n(1-p) = 90 \geq 5$

On peut déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe : $I = [0,8804 ; 0,9196]$

2. Dans l'échantillon, il y a 766 bouteilles présentant moins de 2 % de pulpe, donc la fréquence de bouteilles présentant moins de 2 % de pulpe est de $\frac{766}{900} \approx 0,851$.

Cette fréquence observée est en dehors de l'intervalle I , donc l'affirmation du fournisseur semble erronée.

EXERCICE 3

Commun à tous les candidats

4 points

1. On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1$

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1 &\iff \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -1 \iff \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(e^{-1}) \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} \\ &\iff u_{n+1} = e^{-1} u_n. \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison e^{-1} .

2. Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.

On définit la suite (w_n) par, pour tout entier naturel n , $w_n = 1 - \ln(v_n)$.

On appelle (\mathcal{P}) la proposition suivante : si la suite (v_n) est majorée alors la suite (w_n) est majorée.

Soit la suite définie pour tout naturel par $v_n = \frac{1}{n+1}$: elle est bien à termes positifs et elle est majorée par 1.

Or pour tout naturel n , $w_n = 1 - \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = 1 + \ln(n+1)$; cette suite n'est pas majorée. La proposition (\mathcal{P}) est fautive.

3. La suite (z_n) de nombres complexes est définie par
$$\begin{cases} z_0 = 2 + 3i \\ z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
- $$z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n \iff |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n\right| \iff |z_{n+1}| = \left|\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right| \times |z_n|$$

$$\left| \frac{\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}}{4} \right|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right)^2 = \frac{2}{16} + \frac{6}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \text{ donc } \left| \frac{\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pour tout n , $|z_{n+1}| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$ donc la suite $(|z_n|)$ est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $|z_0| = |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout n , $|z_n| = |z_0| \times q^n = \sqrt{13} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n$.

Tous les termes de la suite géométrique $(|z_n|)$ sont positifs ; la raison de cette suite est strictement comprise entre 0 et 1 donc cette suite est décroissante et converge vers 0.

Il y aura donc un plus petit rang n_0 tel que $|z_{n_0}| \leq 10^{-20}$ et pour tout $n \geq n_0$ on aura $|z_n| \leq 10^{-20}$.

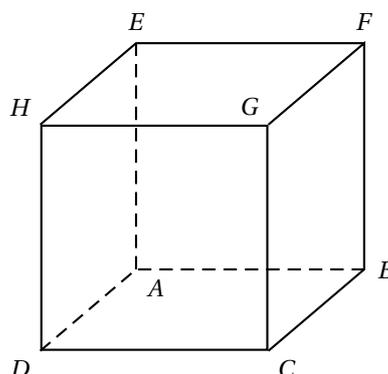
On cherche donc n tel que $|z_n| \leq 10^{-20}$ ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \sqrt{13} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n &\leq 10^{-20} &\Leftrightarrow &\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \leq \frac{10^{-20}}{\sqrt{13}} \\ &&\Leftrightarrow &\ln \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \right) \leq \ln \left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}} \right) \quad \text{croissance de la fonction } \ln \\ &&\Leftrightarrow &n \times \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \leq \ln \left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}} \right) \quad \text{propriété de la fonction } \ln \\ &&\Leftrightarrow &n \geq \frac{\ln \left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}} \right)}{\ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \quad \text{car } \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) < 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\ln \left(\frac{10^{-20}}{\sqrt{13}} \right)}{\ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)} \approx 136,6 \text{ donc pour } n \geq 137, \text{ on a } |z_n| \leq 10^{-20}.$$

EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Donc $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$ et $E(0; 0; 1)$

1. a. La droite (DB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DB}(1; -1; 0)$. Elle passe par le point D . C'est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que \overrightarrow{DM} et \overrightarrow{DB} sont colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{DM} = s\overrightarrow{DB}$ où $s \in \mathbb{R}$.

$$\text{Cela s'écrit } \begin{cases} x-0 = 1 \times s \\ y-1 = (-1) \times s \\ z-0 = 0 \times s \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x = s \\ y = 1-s \\ z = 0 \end{cases} \text{ où } s \in \mathbb{R}$$

- b. La droite (AG) est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AG} soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$ où $t \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \text{ donc } G \text{ a pour coordonnées } (1; 1; 1).$$

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG} \iff \begin{cases} x-0 = 1 \times t \\ y-0 = 1 \times t \\ z-0 = 1 \times t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

2. Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG) . Le point M a donc pour coordonnées $(s; 1-s; 0)$ où $s \in \mathbb{R}$, et le point N a pour coordonnées $(t; t; t)$ où $t \in \mathbb{R}$. Alors \overrightarrow{MN} a pour coordonnées $(t-s; t-1+s; t)$.

La droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si d'une part les vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{AG} sont orthogonaux, et si d'autre part les vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{DB} sont orthogonaux; autrement dit si $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$ et $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \iff (t-s) \times 1 + (t-1+s) \times 1 + t \times 1 = 0 \iff t-s+t-1+s+t = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \iff (t-s) \times 1 + (t-1+s) \times (-1) + t \times 0 = 0 \iff t-s-t+1-s = 0 \iff 1 = 2s \iff s = \frac{1}{2}$$

Les coordonnées de M sont donc $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ et celles de N sont $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

3. Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s; 1-s; 0)$ un point de la droite (DB) et $N(t; t; t)$ un point de la droite (AG) .

- a. Le vecteur \overrightarrow{MN} a pour coordonnées $(t-s; t-1+s; t)$ donc

$$MN^2 = (t-s)^2 + (t-1+s)^2 + t^2 = t^2 - 2ts + s^2 + t^2 + 1 + s^2 - 2t - 2s + 2ts + t^2 = 3t^2 - 2t + 2s^2 - 2s + 1$$

$$3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} = 3\left(t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}\right) + 2\left(s^2 - s + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6}$$

$$= 3t^2 - 2t + \frac{1}{3} + 2s^2 - 2s + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 3t^2 - 2t + 2s^2 - 2s + 1$$

$$\text{Donc } MN^2 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$$

- b. La distance MN est minimale quand le nombre MN^2 est minimal; MN^2 est la somme de trois nombres positifs ou nuls qui sera minimale si chaque nombre est minimal.

Autrement dit pour que MN^2 soit minimal, il faut que $\left(t - \frac{1}{3}\right)^2$ et $\left(s - \frac{1}{2}\right)^2$ soient minimaux.

Les carrés seront minimaux s'ils sont nuls donc pour $t = \frac{1}{3}$ et $s = \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, on a vu que la droite (MN) était la perpendiculaire commune aux deux droites (AG) et (BD) .

EXERCICE 4 **Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité** **5 points**
Partie A

On considère l'équation $51x - 26y = 1$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

1. $51 = 3 \times 17$ et $26 = 2 \times 13$ donc les deux nombres 51 et 26 sont premiers entre eux; d'après le théorème de Bézout, on peut en déduire que l'équation $51x - 26y = 1$ admet des solutions en entiers relatifs.
2. a. Comme $2 \times 26 = 52 = 51 + 1$, on a : $(-1) \times 51 - (-2) \times 26 = 1$ donc le couple $(x_0; y_0) = (-1; -2)$ est solution de l'équation.
- b. On cherche un couple $(x; y)$ solution donc tel que $51x - 26y = 1$; or le couple $(x_0; y_0)$ est solution. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} 51x & - & 26y & = & 1 \\ 51x_0 & - & 26y_0 & = & 1 \\ \hline 51(x - x_0) & - & 26(y - y_0) & = & 0 \end{array}$$

$$51(x - x_0) - 26(y - y_0) = 0 \iff 51(x - x_0) = 26(y - y_0)$$

51 divise $26(y - y_0)$; or 51 et 26 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 51 divise $y - y_0$. On peut donc écrire $y - y_0 = 51k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$51(x - x_0) = 26(y - y_0) \text{ et } y - y_0 = 51k \text{ donc } 51(x - x_0) = 26 \times 51k \text{ et donc } x - x_0 = 26k.$$

Si $(x; y)$ est solution, alors $x = x_0 + 26k = -1 + 26k$ et $y = y_0 + 51k = -2 + 51k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

réciproquement, si $x = -1 + 26k$ et $y = -2 + 51k$, où $k \in \mathbb{Z}$, alors $51x - 26y = 1$ donc le couple $(x; y)$ est solution de l'équation $51x - 26y = 1$.

L'ensemble des couples solutions de l'équation $51x - 26y = 1$ est donc l'ensemble des couples $(-1 + 26k; -2 + 51k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage f par $f(x) = y$, où y est le reste de la division euclidienne de $51x + 2$ par 26.

La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier y .

1. La lettre N correspond à $x = 13$ donc $51x + 2 = 51 \times 13 + 2 = 665$. Comme $665 = 25 \times 26 + 15$, le reste de la division de 665 par 26 est 15 et $f(13) = 15$. Le nombre 15 correspond à la lettre P donc la lettre N est codée en P.
2. $51a \equiv 1 [26]$ signifie que $51a$ s'écrit $1 + 26b$ avec $b \in \mathbb{Z}$.
 $51a = 1 + 26b \iff 51a - 26b = 1$ donc, d'après la partie A, $a = -1 + 26k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On cherche k de \mathbb{Z} pour que $0 \leq a \leq 25$ donc on prend $k = 1$ ce qui donne $a = 25$.
L'entier a tel que $0 \leq a \leq 25$ et $51a \equiv 1 [26]$ est $a = 25$.

3. On suppose que la lettre correspondant à un entier x est codée par la lettre correspondant à un entier y ; alors y est le reste de la division de $51x + 2$ par 26 ce qui signifie que $y \equiv 51x + 2 \pmod{26}$ et $0 \leq y \leq 15$.

$$a = 25 \text{ donc } ay + 2 = 25y + 2$$

$$y \equiv 51x + 2 \pmod{26} \implies 25y \equiv 25 \times 51x + 25 \times 2 \pmod{26}$$

$$\text{On sait que } 51a \equiv 1 \pmod{26} \text{ donc } 51 \times 25 \equiv 1 \pmod{26} \text{ et donc } 25 \times 51x \equiv x \pmod{26}$$

$$\text{On peut donc dire que } 25y \equiv x + 50 \pmod{26} \text{ donc que } 25y + 2 \equiv x + 52 \pmod{26}.$$

$$\text{Or } 52 = 2 \times 26 \text{ donc } 52 \equiv 0 \pmod{26}. \text{ Donc } 25y + 2 \equiv x \pmod{26}$$

On sait que x est le nombre correspondant à une lettre donc $0 \leq x \leq 25$.

$$\left. \begin{array}{l} 25y + 2 \equiv x \pmod{26} \\ 0 \leq x \leq 25 \end{array} \right\} \implies x \text{ est le reste de la division de } 25y + 2 \text{ par } 26$$

4. La lettre N correspond au nombre 13. On cherche donc le nombre x tel que $y = f(x)$ soit égal à 13.

Si $y = 13$, alors x est le reste de la division de $25y + 2$ par 26.

$$25 \times 13 + 2 = 327 \text{ et } 327 = 26 \times 12 + 15 \text{ donc } x = 15$$

La lettre qui est codée N correspond au nombre 15 donc c'est P.

5. Soit une lettre Ω correspondant au nombre x . Elle se code en une lettre Ω_1 correspondant au nombre x_1 , reste de la division de $51x + 2$ par 26, donc $x_1 \equiv 51x + 2 \pmod{26}$. Si on cherche à coder Ω_1 , on aura la lettre Ω_2 correspondant au reste x_2 de la division de $51x_1 + 2$ par 26 donc $x_2 \equiv 51x_1 + 2 \pmod{26}$.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \equiv 51x + 2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 51x_1 + 2 \pmod{26} \end{array} \right\} \implies x_2 \equiv 51(51x + 2) + 2 \pmod{26} \iff x_2 \equiv 2601x + 104 \pmod{26}$$

$$2601 = 26 \times 100 + 1 \text{ donc } 2601 \equiv 1 \pmod{26} \text{ et donc } 2601x \equiv x \pmod{26}$$

$$104 = 26 \times 4 \text{ donc } 104 \equiv 0 \pmod{26}$$

$$\text{Donc } x_2 \equiv 2601x + 104 \pmod{26} \iff x_2 \equiv x \pmod{26}$$

Et comme x et x_2 sont tous les deux des restes dans la division par 26, $x_2 = x$.

Cela veut dire que si on applique deux fois la fonction de codage f à un nombre correspondant à une certaine lettre, on retrouve ce nombre : $f(f(x)) = x$.

Ce sera encore vrai si on applique un nombre pair de fois la fonction de codage.

Donc si on applique 100 fois de suite la fonction de codage f à un nombre correspondant à une certaine lettre, on obtient la lettre du départ.