Baccalauréat S – Nouvelle-Calédonie
7 mars 2014 – Corrigé

EXERCICE 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Aucune justification n'était demandée dans cet exercice.

1. **Réponse b.** : $4\,\text{e}^{\,\text{i}\,\pi}$
   Le nombre $1+\text{i}$ a pour écriture complexe $\sqrt{2}\,\text{e}^{\,\text{i}\,\frac{\pi}{4}}$ donc le nombre $(1+\text{i})^4$ a pour écriture complexe $\left(\sqrt{2}\right)^4\,\text{e}^{\,\text{i}\,4\frac{\pi}{4}} = 4\,\text{e}^{\,\text{i}\,\pi}$.
2. **Réponse c.** : $(x-1)^2+(y+1)^2=4$
   Si on appelle A le nombre d'affixe $1-\text{i}$, l'équation $|z-1+\text{i}| = \left|\sqrt{3}-\text{i}\right|$ équivaut à $|z-z_A| = \left|\sqrt{3}-\text{i}\right|$, ou encore $|z-z_A|^2 = \left|\sqrt{3}-\text{i}\right|^2 \iff |z-z_A|^2=4$.
3. **Réponse c.** : la suite (U_n) définie par $U_n=|Z_n|$ est convergente.
   $$Z_{n+1}=\frac{1+\text{i}}{2}Z_n \Longrightarrow |Z_{n+1}| = \left|\frac{1+\text{i}}{2}Z_n\right| \iff |Z_{n+1}| = \left|\frac{1+\text{i}}{2}\right|\times|Z_n| \iff |Z_{n+1}| = \frac{\sqrt{2}}{2}|Z_n|$$
   Donc la suite $U_n=|Z_n|$ est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; or $-1<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$ donc la suite est convergente et a pour limite 0.
4. **Réponse c.** : ABC est rectangle en A.
   AB$=|z_{\text{B}}-z_{\text{A}}| = \sqrt{10}$; AC$=2\sqrt{10}$ et BC$=5\sqrt{2}$; BC$^2=$ AB$^2+$AC^2 d'où la réponse **c.**

EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Restitution organisée des connaissances

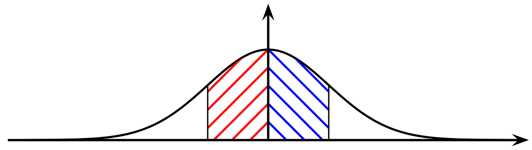
L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right)=1-\alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\text{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ par $H(x)=P(-x\leqslant X\leqslant x)=\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\text{d}t$.

1. La fonction f représente la fonction de densité de probabilité pour la loi normale centrée réduite.
2. $H(0)=\displaystyle\int_0^0 f(t)\,\text{d}t=0$; et d'après le cours $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x)=1$.
3. D'après la relation de Chasles : $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\text{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\,\text{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\text{d}t$.
   Mais la fonction f est positive donc $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)\,\text{d}t$ est l'aire du domaine hachuré en rouge sur la figure ci-dessous, tandis que $\displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,\text{d}t$ est l'aire du domaine hachuré en bleu.



De plus la fonction f est paire, donc ces deux aires sont égales.
Enfin $H(x)$ est l'aire du domaine situé sous la courbe représentant f hachuré en rouge et en bleu sur la figure.
Donc $H(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. On sait que la fonction $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée la fonction f ; donc la fonction H définie par $H(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée la fonction $2f$.
Or $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} > 0$ sur $\mathbb{R}$; comme $H' = 2f$, $H'(x) > 0$ pour tout réel x, et donc la fonction H est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. On établit le tableau de variations de H sur $[0\,;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$H'(x)$		$+$	
$H(x)$	0	$\nearrow$	1

5. En prenant α dans l'intervalle $]0\,;1[$, on a aussi $1-\alpha$ dans l'intervalle $]0\,;1[$; on complète le tableau de variations de H :

x	0		χ_α		$+\infty$
$H(x)$	0	$\nearrow$	$1-\alpha$	$\nearrow$	1

D'après le tableau de variations, il existe un réel strictement positif unique noté χ_α tel que $H\left(\chi_\alpha\right) = 1-\alpha$, donc tel que $P\left(-\chi_\alpha \leqslant X \leqslant \chi_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.
60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.
Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'événement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'événement : « La pipette a un défaut ».

1. La pipette choisie au hasard présente un défaut ; la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A est $P_D(A)$.
$P_D(A) = \dfrac{P(A\cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A)\times P_A(D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}6\times 0{,}046}{0{,}05} = 0{,}552$

2. D'après la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(A\cap D) + P(B\cap D) \iff 0{,}05 = 0{,}6\times 0{,}046 + P(B\cap D) \iff 0{,}05 - 0{,}0276 = P(B\cap D)$
Donc $P(B\cap D) = 0{,}0224$.

3. Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, la probabilité qu'une pipette présente un défaut est $P_B(D)$. Or $P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$.
$P_B(D) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(B)} = \dfrac{0,0224}{0,4} = 0,056$.
Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, le pourcentage de pipettes présentant un défaut est donc de 5,6 %.

Partie C

1. On cherche la probabilité qu'une pipette prise au hasard soit conforme, soit $P(98 < X < 102)$, en sachant que X suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1,0424$.
À la calculatrice, on trouve 0,9499 à 10^{-4} près.

   En utilisant la table fournie :
   $P(98 < X < 102) = P(X < 102) - P(X \leqslant 98) \approx 0,97494 - 0,02506 \approx 0,94988$
   Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.
2. On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100 et on suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.
Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.
   a. Comme on peut supposer que les tirages sont indépendants, la variable aléatoire Y_n suit une loi binomiale de paramètres $n \geqslant 100$ et $p = 0,05$.
   b. On sait que $n \geqslant 100$ donc $n \geqslant 30$.
   $n \geqslant 100$ et $p = 0,05$ donc $np \geqslant 100 \times 0,05 \iff np \geqslant 5$
   $p = 0,05$ donc $1 - p = 0,95$; $n(1-p) \geqslant 100 \times 0,95 \iff n(1-p) \geqslant 95$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.
   Les trois conditions sont vérifiées.
   c. Pour une proportion p et un échantillon de taille n, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :
   $$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
   Donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence des pipettes non conformes dans un échantillon est :
   $$\left[0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,05(1-0,05)}}{\sqrt{n}} ; 0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,05(1-0,05)}}{\sqrt{n}}\right] =$$
   $$\left[0,05 - 1,96\frac{\sqrt{0,0475}}{\sqrt{n}} ; 0,05 + 1,96\frac{\sqrt{0,0475}}{\sqrt{n}}\right]$$

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

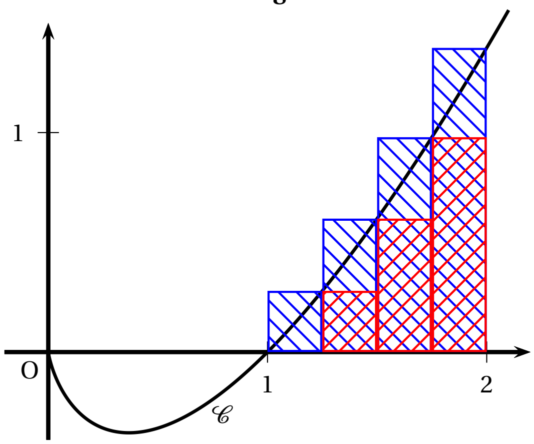
Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

1. D'après le cours, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty \text{ (par produit) donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
2. La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables :
$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

3. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$: $\ln(x)+1>0 \iff \ln(x)>-1 \iff x>\mathrm{e}^{-1}$
Donc :
- La fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\mathrm{e}^{-1}]$;
- la fonction f est strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$.

Partie B

Figure



Algorithme

Variables
k et n sont des entiers naturels
U,V sont des nombres réels
Initialisation
U prend la valeur 0
V prend la valeur 0
n prend la valeur 4
Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
Affecter à U la valeur $U+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$
Affecter à V la valeur $V+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Affichage
Afficher U
Afficher V

1. a. Sur la figure ci-dessus, le nombre U représente la somme des aires des rectangles inférieurs (en rouge) ; cette somme minore l'aire sous la courbe. Le nombre V représente la somme des aires des rectangles supérieurs (en bleu) ; cette somme majore l'aire sous la courbe.

b. On fait tourner l'algorithme ci-dessus :

Variables	k	U	V	n
Initialisation		0	0	4
Traitement	0	0	0,069 8	4
	1	0,069 7	0,221 8	4
	2	0,221 7	0,466 7	4
	3	0,466 6	0,813 2	4
Affichage	On affiche la valeur de U : 0,466 6			
	On affiche la valeur de V : 0,813 2			

c. On peut donc en déduire que $0{,}4666<\mathscr{A}<0{,}8132$.

2. On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant V_n$.

a. Sachant que $U_n=\dfrac{1}{n}\left[f(1)+f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)\right]$ et que
$V_n=\dfrac{1}{n}\left[f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)+f(2)\right]$,
on peut dire que $V_n-U_n=\dfrac{1}{n}\big(f(2)-f(1)\big)=\dfrac{2\ln(2)-0}{n}=\dfrac{2\ln(2)}{n}$.
$V_n-U_n<0{,}1 \iff \dfrac{2\ln(2)}{n}<0{,}1 \iff 2\ln(2)<0{,}1\,n \iff \dfrac{2\ln(2)}{0{,}1}<n$
Or $\dfrac{2\ln(2)}{0{,}1}\approx 13{,}86$ donc le plus petit entier n tel que V_n-U_n soit inférieur à 0,1 est 14.
Vérification : $V_{13}-U_{13}\approx 0{,}107>0{,}1$ et $V_{14}-U_{14}\approx 0{,}099<0{,}1$.

b. Pour obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à 0,1 dans l'algorithme, il suffit d'entrer 14 comme valeur de n ; autrement dit, au lieu de « n prend la valeur 4 », on entrera « n prend la valeur 14 ».

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.

1. $F'(x) = \dfrac{2x}{2} \times \ln(x) + \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{4} = x\ln(x) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2} = x\ln(x) = f(x)$

   Donc F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

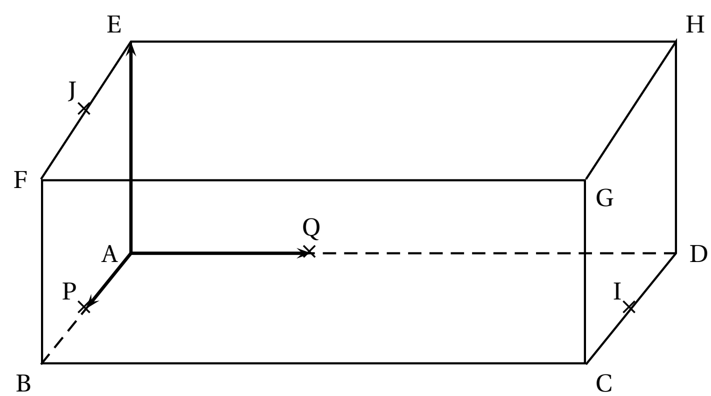
2. La fonction f est croissante sur $[1\,;2]$ et $f(1) = 0$ donc la fonction f est positive sur $[1\,;2]$; on peut donc dire que $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = F(2) - F(1) = (2\ln(2) - 1) - \left(-\dfrac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \dfrac{3}{4}$

EXERCICE 4 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\,;\ \overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AQ},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Les points A, B et I appartiennent au plan (ABC) ; comme J est sur l'arête [EF] qui est strictement parallèle au plan (ABC), le point J n'appartient pas au plan (ABC).

   Donc les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

2. Le plan médiateur (P_1) du segment [AB] est le plan perpendiculaire à [AB] passant par le milieu P de [AB] ; c'est donc l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PM}$ soient orthogonaux.

   Dans le repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AP},\ \overrightarrow{AQ},\ \overrightarrow{AE}\right)$, A a pour coordonnées $(0\,;0\,;0)$ et B a pour coordonnées $(2\,;0\,;0)$, donc $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(2\,;0\,;0)$.

   Le point M a pour coordonnées $(x\,;y\,;z)$ et le point P a pour coordonnées $(1\,;0\,;0)$, donc $\overrightarrow{PM}$ a pour coordonnées $(x-1\,;y\,;z)$.

   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PM}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{PM} = 0 \iff (x-1)\times 2 + y \times 0 + z \times 0 = 0 \iff x - 1 = 0$

   Le plan (P_1) a pour équation $x - 1 = 0$.

On peut aussi justifier que le plan médiateur du segment [AB] est le plan (PIJ) et que les trois points P, I et J ont pour abscisse 1 ; donc une équation du plan (PIK) est $x = 1$.

3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.

D'après le texte, $\overrightarrow{\text{AD}} = 3\overrightarrow{\text{AQ}}$; or le point Q a pour coordonnées $(0;1;0)$ donc le point D a pour coordonnées $(0;3;0)$.

$\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{DC}} = \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AB}}$; or $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $(2;0;0)$ donc $\overrightarrow{\text{AC}}$ a pour coordonnées $(2;3;0)$. Ce sont aussi les coordonnées du point C.

Le point I est le milieu de [CD] donc le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+2}{2};\dfrac{3+3}{2};\dfrac{0+0}{2}\right)$ soit $(1;3;0)$.

On calcule de même les coordonnées du point J, milieu de [EF], et on trouve $(1;0;1)$

Un point M de coordonnées $(x; y; z)$ appartient au plan médiateur de [IJ] si et seulement si IM = JM autrement dit $\text{IM}^2 = \text{JM}^2$.

$\text{IM}^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2$; $\text{JM}^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2$

$\text{IM}^2 = \text{JM}^2 \iff (x-1)^2+(y-3)^2+z^2 = (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 \iff y^2-6y+9+z^2 = y^2+z^2-2z+1 \iff -6y+2z+8 = 8 \iff 3y-z-4=0$

Le plan médiateur de [IJ] a pour équation $3y - z - 4 = 0$ donc c'est le plan (P_2).

4. **a.** Le plan (P_1) d'équation $x - 1 = 0$ a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $(1;0;0)$.

Le plan (P_2) d'équation $3y - z - 4 = 0$ a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n_2}$ de coordonnées $(0;3;-1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc les plans (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles. Les plans (P_1) et (P_2) sont donc sécants.

b. Pour déterminer la droite d'intersection des plans (P_1) et (P_2), on résout le système

$\left\{\begin{array}{r} x-1=0 \\ 3y-z-4=0 \end{array}\right.$ que l'on écrit $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=y \\ z=3y-4 \end{array}\right.$

Donc la droite (Δ) d'intersection des plans (P_1) et (P_2) a pour représentation paramétrique :

$\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=t \\ z=3t-4 \end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

c. Un point de (Δ) a pour coordonnées $(1;t;3t-4)$ où t est un réel.

On va donc chercher une valeur de t pour laquelle $\Omega\text{A} = \Omega\text{I}$, le point Ω étant un point de (Δ), autrement dit pour laquelle $\Omega\text{A}^2 = \Omega\text{I}^2$.

$\Omega\text{A}^2 = (-1)^2 + (-t)^2 + (-3t+4)^2$; $\Omega\text{I}^2 = (1-1)^2 + (3-t)^2 + (-3t+4)^2$

$\Omega\text{A}^2 = \Omega\text{I}^2 \iff (-1)^2 + (-t)^2 + (-3t+4)^2 = (1-1)^2 + (3-t)^2 + (-3t+4)^2 \iff 1 + t^2 = 9 - 6t + t^2 \iff 6t = 8 \iff t = \dfrac{4}{3}$

Le point Ω de (Δ) tel que $\Omega\text{A} = \Omega\text{I}$, correspond au paramètre $t = \dfrac{4}{3}$ et a donc pour coordonnées $\left(1;\dfrac{4}{3};3\times\dfrac{4}{3}-4\right)$ c'est-à-dire $\left(1;\dfrac{4}{3};0\right)$.

d. Le point Ω appartient à la droite (Δ) donc il appartient à la fois à (P_1) et à (P_2).

(P_1) est le plan médiateur de [AB] et $\Omega \in (P_1)$ donc $\Omega\text{A} = \Omega\text{B}$.

(P_2) est le plan médiateur de [IJ] et $\Omega \in (P_2)$ donc $\Omega\text{I} = \Omega\text{J}$.

De plus $\Omega\text{A} = \Omega\text{J}$; donc $\Omega\text{A} = \Omega\text{B} = \Omega\text{I} = \Omega\text{J}$:

le point Ω est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.