

Baccalauréat S Métropole 20 juin 2013

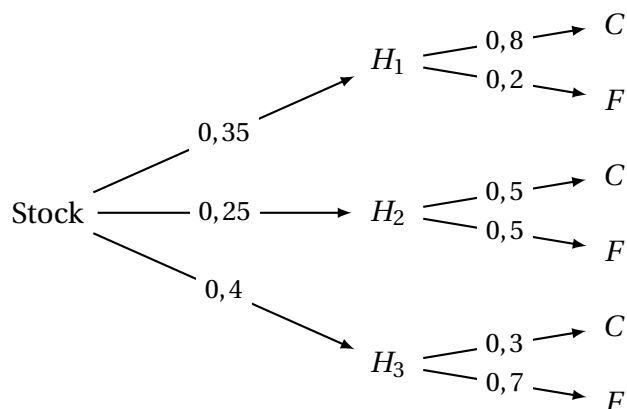
EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Puisque le choix de l'arbre se fait au hasard dans le stock de la jardinerie, on assimile les proportions données à des probabilités.

1. a. L'arbre pondéré traduisant cette situation est :



- b. On cherche à calculer la probabilité de l'intersection $H_3 \cap C$, donc :
 $P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3$. On a donc $P(H_3 \cap C) = 0,12$.
- c. Puisque la jardinerie ne se fournit qu'auprès de trois horticulteurs, les événements H_1 , H_2 et H_3 forment une partition de l'univers. On peut donc appliquer la loi des probabilités totales, et on en déduit :
 $P(C) = P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C) =$
 $0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3 = 0,525$.
- d. On cherche cette fois à calculer une probabilité conditionnelle :

$$P_C(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533$$
2. a. Nous avons un schéma de Bernoulli (l'arbre choisi est-il un conifère ?), avec une probabilité de succès de 0,525 qui est répété 10 fois de façon indépendante (puisque l'on suppose que les choix successifs peuvent être assimilés à un tirage au sort avec remise), donc la variable aléatoire X suit bien une loi binomiale de paramètres 10 et 0,525.
- b. La probabilité demandée ici est celle de l'événement $X = 5$, et donc :

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times (1 - 0,525)^5$$
 Finalement $P(X = 5) \approx 0,243$.
- c. Cette fois, la probabilité demandée est celle de $X \leq 8$, qui est l'événement contraire de la réunion des événements disjoints $X = 9$ et $X = 10$. On a alors : $P(X \leq 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10) \approx 0,984$.

EXERCICE 2

7 points

Commun à tous les candidats

1. a. On lit $f(1) = y_B = 2$ et pour $f'(1)$, on lit le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1, c'est à dire le coefficient directeur de la droite (CB) , qui est horizontale, donc $f'(1) = 0$.
- b. La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle (le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle). On a :

$$f'(x) = \frac{\left(0 + b \times \frac{1}{x}\right) \times x - (a + b \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{b - (a + b \ln x)}{x^2}$$

$$\text{Soit effectivement : } f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}.$$

- c. On en déduit : $f(1) = \frac{a + b \ln(1)}{1} = a + 0 = a$, or d'après le 1. a.,

$$f(1) = 2, \text{ donc } a = 2.$$

$$\text{Du coup, on a } f'(1) = \frac{(b-2) - b \ln(1)}{1^2} = b-2, \text{ or d'après le 1. a., } f'(1) = 0, \text{ donc } b = 2.$$

2. a. On reprend la forme de f' obtenue précédemment, en remplaçant a et b par 2, et on a : $f'(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} = \frac{2}{x^2} \times (-\ln x)$.

Puisque pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $\frac{2}{x^2}$ est un nombre strictement positif, on en déduit que la dérivée de f a bien le même signe que $-\ln x$ pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$.

- b. Quand x tend vers 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc, par limite d'un produit et d'une somme : $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + 2 \ln x = -\infty$. Comme par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+$, alors, par limite d'un quotient, on a $\lim_0 f = -\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, on va utiliser la forme de f présentée dans la question : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, d'après la propriété des croissances comparées, et donc par limite d'une somme, puis par produit par 2 : $\lim_{+\infty} f = 0$.

- c. On peut donc dresser le tableau des variations de f :

x	0	1	$+\infty$		
$-\ln x$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$		2		0

3. a. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; 1]$ et 1 est une valeur strictement comprise entre $\lim_0 f$ et $f(1)$,

donc l'application du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'une unique solution à l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$, qui sera notée α .

- b. Par balayage à la calculatrice, on obtient $f(5) > 1$ et $f(6) < 1$, donc comme la fonction f est continue sur $[5 ; 6]$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[5 ; 6]$, et puisque l'on avait admis qu'il n'y avait qu'une seule solution β à cette équation sur $]1 ; +\infty[$, cette solution est donc entre 5 et 6. Enfin, puisque ni 5 ni 6 n'ont une image exactement égale à 1, on peut dire que β est strictement entre 5 et 6. Le nombre entier n cherché est donc 5.

4. a. On obtient :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	
$f(m)$	$\approx 1,23$	$\approx 3,09$	$\approx 0,10$	$\approx 0,79$	$\approx 1,03$

Le tableau a été complété par la ligne « $f(m) \approx$ » pour montrer les affectations à a ou à b .

Le tableau précédent sera probablement considéré comme correct, mais si on interprète la question très rigoureusement, d'un point de vue algorithmique, on doit supposer que l'étape 1 est l'initialisation, et les étapes de 2 à 5 correspondant aux itérations de 1 à 4. Dans ce cas, pour l'étape 1 n'a pas de valeur m , et la valeur $b - a$ va servir à savoir si l'itération suivante va être utile ou non. Dans ce cas, on va écrire dans la colonne les valeurs en mémoire à la fin de l'itération de la boucle « Tant que », ce qui donne le tableau suivant :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m		0,5	0,25	0,375	0,4375

- b. Cet algorithme renvoie les deux bornes obtenues pour encadrer le nombre α par dichotomie, avec une amplitude au plus égale à 0,1.
 c. Pour que l'algorithme donne un encadrement de β avec la même précision, il faut modifier l'initialisation, en mettant :

Affecter à a la valeur 5.

Affecter à b la valeur 6.

Puis, dans le traitement, modifier le test « Si » pour qu'il soit : "Si $f(m) > 1$ ", afin de prendre en compte la décroissance de f sur l'intervalle $[5 ; 6]$.

(Une autre possibilité serait d'affecter 6 à a et 5 à b , et de modifier le « tant que » pour avoir « tant que $a - b > 0,1$ » et alors a serait la borne haute de l'encadrement, et b la borne basse).

5. a. Pour répondre à cette question, on commence par déterminer l'aire du rectangle, de largeur 1 et de hauteur 2 : son aire est donc de 2 unités d'aire. Il faut ensuite déterminer l'aire délimitée par la courbe \mathcal{C} dans le rectangle $OABC$, et pour cela, il faut commencer par déterminer qu'elle est l'abscisse de l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, et donc résoudre :

$f(x) = 0 \iff 2(1 + \ln x) = 0$, c'est à dire résoudre : $\ln x = -1$, qui par application de la fonction exponentielle, donne une unique solution, qui est $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$, la fonction f est positive et continue, et donc l'aire délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$ est donnée par : $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx$, en unités d'aire.

Pour que la courbe \mathcal{C} partage le rectangles en deux domaines d'aires égales, il faut alors que l'aire sous cette courbe soit la moitié de l'aire du rectangle, c'est à dire une unité d'aire.

La résolution du problème reviendra bien à démontrer :

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 1.$$

- b. On a $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$. En posant $u = \ln$, on reconnaît alors :
 $f = 2u' + 2u'u$.

Une primitive de f sur $]0; +\infty[$ est donc : $F = 2u + u^2$, c'est à dire $F(x) = 2 \ln x + (\ln x)^2$.

$$\text{On a alors } \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = \left[F(x)\right]_{\frac{1}{e}}^1 = F(1) - F\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = 2 \ln 1 + (\ln 1)^2 - \left[2 \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2\right] = 0 - (-2 + 1) = 1.$$

On arrive donc bien à la conclusion que le rectangle $OABC$ est bien partagé en deux domaines de même aire par la courbe \mathcal{C} .

EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

1. **Vrai** : Si on pose A , le point d'affixe i et B le point d'affixe -1 dans le plan complexe, alors puisque M est le point d'affixe z , on a : $|z - i| = |z_M - z_A| = AM$. De même $|z + 1| = MB$, et donc l'ensemble des points M recherché est l'ensemble des points équidistants de A et de B , c'est à dire la médiatrice du segment $[AB]$, c'est donc bien une droite.

2. **Faux** : On remarque que $1 + i\sqrt{3} = 2 \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. En utilisant les propriétés des modules et des arguments des nombres

complexes, on a : $(1 + i\sqrt{3})^4 = 2^4 \times e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Un argument du nombre complexe étudié est donc $\frac{4\pi}{3}$ qui n'est congru ni à 0 ni à π modulo 2π , donc le nombre n'est pas réel.

3.

Méthode 1 Vrai : Après avoir choisi un repère orthonormé, calculons le produit scalaire p des deux vecteurs :

$$p = \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) \cdot \overrightarrow{BG}, \text{ d'après la relation de Chasles.}$$

$$p = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BG}, \text{ par distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs.}$$

Par ailleurs, les vecteurs \overrightarrow{BG} et \overrightarrow{EF} sont orthogonaux, car ce dernier est orthogonal à la face $BCGF$ qui contient le premier vecteur.

De plus les vecteurs \overrightarrow{BG} et \overrightarrow{FC} sont également orthogonaux, car ils sont construits sur les diagonales d'un carré $BCGF$, qui sont perpendiculaires entre elles (comme toutes les diagonales de losanges).

Finalement, p est la somme de deux produits scalaires nuls, donc p est lui même nul, ce qui, par définition signifie que les droites (BC) et (CG) sont orthogonales.

Méthode 2 : Les faces $BCGF$ et $AEHD$ sont des carrés, donc les segments $[BG]$ et $[FC]$ d'une part, $[ED]$ et $[AH]$ d'autre part sont perpendiculaires.

Le plan médiateur de $[BG]$ contient donc les points E, D, C, F .

Donc en particulier (BC) et (CG) sont orthogonales

Méthode 3 : En prenant le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on trouve que

$$\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ D'où } \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 \text{ et la conclusion.}$$

4. **Vrai** : La droite dont on nous propose une représentation paramétrique est dirigée par un vecteur \vec{n} de coordonnées $(1; 1; 3)$, c'est à dire par un vecteur qui est normal à \mathcal{P} , d'après l'équation de celui-ci.

Comme de plus, le point S est sur cette droite dont on nous donne la représentation paramétrique (c'est le point de paramètre -1 sur cette droite), on peut en déduire que la représentation paramétrique donnée est bien celle de la droite décrite.

$$\text{Autre méthode: Avec } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+t \\ z = 1+3t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+1+t \\ y = -2+1+t \\ z = -2+3+3t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1+(1+t) \\ y = -2+(1+t) \\ z = -2+3(1+t) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+t' \\ y = -2+t' \\ z = -2+3t' \end{cases} \text{ (en posant}$$

$t' = 1+t$) qui traduit bien la relation $\overrightarrow{SM} = t'\vec{n}$ soit une équation de la perpendiculaire à \mathcal{P} contenant S .

EXERCICE 4

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. On calcule les premiers termes, par exemple en utilisant le mode récurrence de la calculatrice, et on obtient :

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 + \frac{1}{3} \approx 2,33 & u_2 &= 2 + \frac{8}{9} \approx 2,89 \\ u_3 &= 3 + \frac{16}{27} \approx 3,59 & u_i &= 4 + \frac{32}{81} \approx 4,40 \end{aligned}$$

- b. On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante. On pourra en tout cas affirmer qu'elle n'est pas décroissante.

2. a. Nous allons procéder par récurrence :

Identification de la propriété : Pour tout entier naturel n , posons la propriété \mathcal{P}_n suivante : $u_n \leq n + 3$.

Initialisation : Puisque l'on a $u_0 = 2$ et $0 + 3 = 3$, on vérifie bien :

$u_0 \leq 0 + 3$: la propriété \mathcal{P}_0 est bien vraie.

Hérédité : Pour un entier k naturel donné, on suppose la propriété \mathcal{P}_k vraie.

On a $u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1$.

Par hypothèse de récurrence : $u_k \leq k + 3$

En multipliant par un nombre positif : $\frac{2}{3}u_k \leq \frac{2}{3}(k + 3)$

Soit $\frac{2}{3}u_k \leq \frac{2}{3}k + 2$

Puis, en ajoutant un même nombre dans chaque membre :

$$\frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 \leq \frac{2}{3}k + 2 + \frac{1}{3}k + 1$$

Ce qui donne : $u_{k+1} \leq k + 3 \leq k + 4$. On a donc $u_{k+1} \leq (k + 1) + 3$, c'est à dire que la propriété \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

Nous avons donc démontré le caractère héréditaire de la véracité des propriétés \mathcal{P}_n .

Conclusion : Puisque la propriété \mathcal{P}_0 est vraie et que nous avons prouvé l'hérédité, on peut en déduire que pour tout entier naturel n , on a \mathcal{P}_n vraie, c'est à dire que pour tout entier naturel n , on a bien $u_n \leq n + 3$.

b. $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3}$

On a donc bien $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} \times (-u_n + n + 3) = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$. Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leq n + 3$ ce qui équivaut à dire que la différence $n + 3 - u_n$ est positive, et elle le reste en étant multipliée par $\frac{1}{3}$, donc la différence entre deux termes consécutifs étant positive, on confirme bien que notre conjecture était correcte : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien croissante, dès le rang 0.

3. a. Exprimons, pour un entier n naturel quelconque, v_{n+1} en fonction de v_n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$$

$$\text{Donc } v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n.$$

La relation de récurrence obtenue confirme que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

- b.** On peut donc en déduire une expression explicite du terme général de la suite v : $v_n = v_0 \times q^n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Enfin, puisque l'on a, pour tout n , $v_n = u_n - n$, on en déduit :

$u_n = v_n + n$, et donc on aboutit bien à l'expression demandée :

$$u_n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

- c.** Puisque la raison q est strictement comprise entre -1 et 1 , on en déduit que la limite de la suite v est 0 , et donc par limite d'une somme de suites, la limite de la suite u est donc $+\infty$, et la suite u est donc divergente.

- 4. a.** S_n est la somme de $n+1$ termes de la suite u_n . Mais, comme par ailleurs, on peut considérer que chaque terme u_n est la somme de v_n et de n , donc en réordonnant les termes, S_n est la somme de deux « sous-sommes » : celle des $n+1$ premiers termes de la suite v et celle des $n+1$ premiers entiers naturels.

La première sous-somme est une somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique, et vaut donc :

$$v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 2 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

La seconde sous-somme est la somme des $n+1$ premiers entiers naturels, c'est à dire la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1 , donc elle vaut :

$$\frac{0 + n}{2} \times (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ (résultat classique).}$$

$$\text{Finalement, on a } S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}.$$

- b.** On en déduit : $T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Puisque, une fois encore, q est entre -1 et 1 , on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.

Donc par limite d'une somme de suites, puis d'un produit de suites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6.$$

Par ailleurs, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, donc par limite d'un quotient de suites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0.$$

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$, et donc finalement, par limite d'une somme de suites, on arrive à conclure que la suite T converge vers $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 4**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = 0,95 \times v_n + 0,01 \times c_n \text{ et}$$

$$c_{n+1} = 0,05v_n + 0,99c_n.$$

2. Si $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,01b \\ 0,05a + 0,99b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les réels c et d tels que $A \times X = Y$ sont :

$$c = 0,95a + 0,01b \text{ et } d = 0,05a + 0,99b$$

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = (v_n c_n)$. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n , $X_n = A^n X_0$.

$$3. \text{ a. Calculons } P \times Q : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \text{Calculons } Q \times P : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

On constate que les deux produits donnent $(6I_2)$ donc si au lieu de multiplier P par Q on multiplie P par $\frac{1}{6}Q$ on obtient I_2 , donc $\frac{1}{6}Q = P^{-1}$.

b. Calculons $P^{-1}AP = \frac{1}{6}QAP$
d'abord, on calcule QA :

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ a &= 0,95 + 0,05 = 1; \quad b = 0,01 + 0,99 = 1; \quad c = -5 \times 0,95 + 0,05 = -4,7, \\ d &= -0,05 + 0,99 = 0,94 \\ QA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4,7 & 0,94 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ensuite on fait } (QA)P \text{ c'est } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4,7 & 0,94 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5,64 \end{pmatrix}$$

Reste à multiplier ce produit par $\frac{1}{6}$; on obtient $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix}$ qui est bien une matrice diagonale D .

- c. Démontrons, par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Pour $n = 1$ il s'agit de démontrer que $A = PDP^{-1}$; or $P^{-1}AP = D$ donc en multipliant à gauche par P , on a :

$P(P^{-1}AP) = PD$, or par associativité cela s'écrit encore $(P(P^{-1})AP) = PD$ donc $I_2AP = PD$ donc $AP = PD$, en multipliant à droite par P^{-1} , on obtient : $(AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, donc $A = PDP^{-1}$: l'initialisation est prouvée.

Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $A^n = PD^nP^{-1}$, alors multiplions à droite par A :

$$A^{n+1} = PD^nP^{-1}A,$$

mais ce dernier A c'est $A = PDP^{-1}$ donc

$$A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1}, \text{ or } P^{-1}P = I_2 \text{ donc } A^{n+1} = PD^nI_2DP^{-1},$$

$$A^{n+1} = PD^nDP^{-1} \text{ et enfin}$$

$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1} \text{ ce qui prouve l'hérédité.}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettant d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}(1 + 5 \times 0,94^n) v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0,94^n) c_0.$$

et comme la suite géométrique $(0,94^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 vu que $q = 0,94$ donc $-1 < q < 1$

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\frac{1}{6}(1 + 5 \times 0) v_0 + \frac{1}{6}(1 - 0) c_0$ donc vers

$\frac{1}{6}(v_0 + c_0) = \frac{250\,000}{6}$ et donc par stabilité de la population totale, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\frac{5}{6}(v_0 + c_0) = \frac{1\,250\,000}{6}$.