Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Centres étrangers ∾ 12 juin 2013

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.
Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

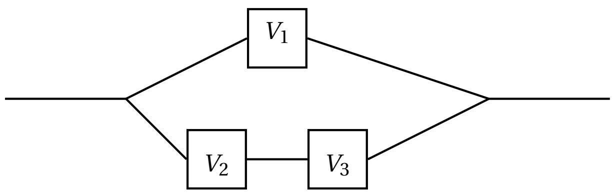
Partie A

La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,2$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?
2. Calculer la probabilité, à 0,001 près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6 000 heures.

Partie B

Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre.
Le circuit est en état de marche si V_1 est en état d arche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.



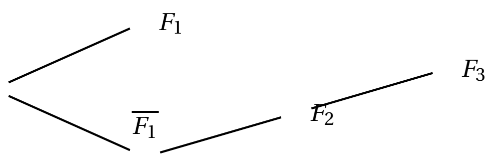
On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6 000 heures. On note :

- F_1 l'évènement : « la vanne V_1 est en état de marche après 6 000 heures ».
- F_2 l'évènement : « la vanne V_2 est en état de marche après 6 000 heures ».
- F_3 l'évènement : « la vanne V_3 est en état de marche après 6 000 heures ».
- E : l'évènement : « le circuit est en état de marche après 6 000 heures ».

On admet que les évènements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à $0,3$.

1. L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation.

   Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.



2. Démontrer que $P(E) = 0,363$.
3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment là. Arrondir au millième.

Partie C

L'industriel affirme que seulement 2 % des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1. Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable F,

2. On choisit 400 vannes au hasard dans la production, On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.

Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.

Au vu de ce résultat peut-on remettre en cause. au seuil de 95 %, l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.

L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients, La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Déterminer $P(760 \leqslant D \leqslant 840)$.

2. Déterminer $P(D \leqslant 880)$.

3. L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1 % de chance d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

Les quatre questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère

- les points A (12 ; 0 ; 0), B (0 ; −15 ; 0), C (0 ; 0 ; 20), D (2 ; 7 ; −6), E (7 ; 3 ; −3) ;
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$

Affirmation 1
Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par le point A est :

$$2x + y + 2z - 24 = 0$$

Affirmation 2
Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 9-3t \\ y &=& 0 \\ z &=& 5+5t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3
La droite (DE) et le plan $\mathscr{P}$ ont au moins un point commun.

Affirmation 4
La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 3 — 5 points

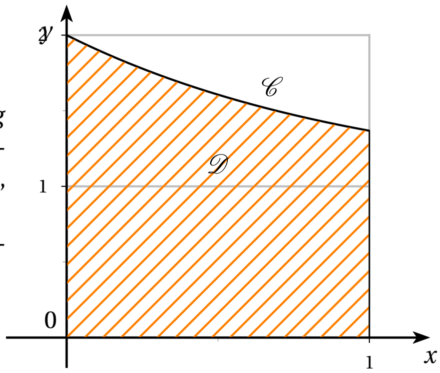
Commun à tous les candidats

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~1]$ par :

$$g(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~1]$, $g(x) > 0$.

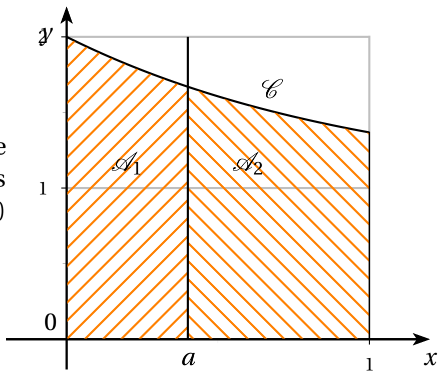
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathscr{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathscr{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox),les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis $\mathscr{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
$\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



1. **a.** Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - \mathrm{e}^{-a} + 1$.

   b. Exprimer $\mathscr{A}_2$ en fonction de a.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

   a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

   b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0~;~1]$. en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.
Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \frac{1}{\text{e}}$. On pourra utiliser un argument graphique.

2. Déterminer la valeur exacte du réel b.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'avant pas choisi la spécialité mathématique

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur … Affecter à n la valeur … Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.

2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	…	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	…	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux îles A et B d'un archipel.
Au début de l'année 2013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce sont présents sur l'île A et 10 millions sur l'île B.
Des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès, et migrations entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes :

— sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 30 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente ;

— sur l'île B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.

Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) le nombre d' oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement B) au début de l'année $(2013 + n)$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

On donne ci-contre un algorithme qui doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux iles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

Début de l'algorithme
Lire n
Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013
Afficher i
Afficher a
Afficher b
Tant que $i < n$ faire
Affecter à c la valeur $(0,8a + 0,3b)$
Affecter à b la valeur $(0,2a + 0,7b)$
Affecter à a la valeur c
Fin du Tant que
Fin de l 'algorithme

1. Cet algorithme comporte des oublis dans le traitement. Repérer ces oublis et les corriger.
2. On donne ci-dessous une copie d'écran des résultats obtenus après avoir corrigé l'algorithme précédent dans un logiciel d'algorithmique, l'utilisateur avant choisi l'année 2020.

⋆ ⋆ ⋆ Algorithme lancé ⋆ ⋆ ⋆
En l'année 2013, a prend la valeur 20 et b prend la valeur 10
En l'année 2014, a prend la valeur 19 et b prend la valeur 11
En l'année 2015, a prend la valeur 18,5 et b prend la valeur 11,5
En l'année 2016, a prend la valeur 18,25 et b prend la valeur 11,75
En l'année 2017, a prend la valeur 18,125 et b prend la valeur 11,875
En l'année 2018. a prend la valeur 18,042 5 et b prend la valeur 11,937 5
En l'année 2019, a prend la valeur 18,031 25 et b prend la valeur 11,968 75
En l'année 2020, a prend la valeur 18,015 625 et b prend la valeur 11,984 375
⋆ ⋆ ⋆ Algorithme terminé ⋆ ⋆ ⋆

Au vu de ces résultats, émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie B - Étude mathématique

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.

   On admet alors que $U_n = M^n U_0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

2. ¿ l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,5^n & 0,6-0,6\times 0,5^n \\ 0,4-0,4\times 0,5^n & 0,4+0,6\times 0,5^n \end{pmatrix}.$$

On ne détaillera le calcul que pour le premier des coefficients de la matrice M^n.

3. Exprimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

4. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.