Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2013

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie 1

$$h(t) = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

– Par propriété de la fonction exponentielle, $\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + b\mathrm{e}^{-0,04t} = 1$ donc par quotient $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = a$, d'après l'énoncé on a donc $a = 2$.

– $h(0) = 0,1 \Rightarrow \dfrac{a}{1+b} = 0,1 \Rightarrow b = \dfrac{2}{0,1} - 1 = 19$

Partie 2

$$f(t) = \frac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

1. f est de la forme $\dfrac{2}{u}$ avec $u(t) = 1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}$ donc $f' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(t) = -0,76\,\mathrm{e}^{-0,04t}$, soit (confusion à ne pas faire entre fonction u, u' et valeurs en t ...)

   $$f'(t) = \frac{2 \times 0,76\,\mathrm{e}^{-0,04t}}{\left(1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}\right)^2}.$$

   Pour tout $t \in [0~;~250]$, $f'(t) > 0$ donc f strictement croissante sur l'intervalle $[0~;~250]$.

2. Le plant de maïs atteint une hauteur supérieure à 1,5 m se traduit par $h(t) > 1,5$

   $$\begin{array}{rrcl}
   & \dfrac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0,04t}} & > & 1,5 \\
   \Leftrightarrow & \dfrac{2}{1,5} - 1 & > & 19\mathrm{e}^{-0,04t} \\
   \Leftrightarrow & \dfrac{1}{57} & > & \mathrm{e}^{-0,04t} \\
   \Leftrightarrow & \ln\left(\dfrac{1}{57}\right) & > & -0,04t \\
   \Leftrightarrow & -\ln 57 & > & -0,04t \\
   \Leftrightarrow & \dfrac{\ln 57}{0,04} & < & t
   \end{array}$$

   Or $\dfrac{\ln 57}{0,04} \approx 101,08$.

   Il faut donc un peu plus de 101 jours pour que le plant dépasse 1,5 m.

3. (a) Pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;250]$ on a

$$\frac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19}=\frac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}(1+\frac{19}{\mathrm{e}^{0,04t}})}=\frac{2\cancel{\mathrm{e}^{0,04t}}}{\cancel{\mathrm{e}^{0,04t}}(1+19\mathrm{e}^{-0,04t})}=f(t)$$

$F(t)=50\ln\left(\mathrm{e}^{0,04t}+19\right)$ est de la forme $50\ln u(t)$ avec $u(t)=\mathrm{e}^{0,04t}+19$ et $u(t)>0$ sur $\mathbb{R}$.
donc $F'=50\dfrac{u'}{u}$ avec $u'(t)=0,04\mathrm{e}^{0,04t}$, soit

$$F'(t)=50\times\frac{0,04\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19}=\frac{2\mathrm{e}^{0,04t}}{\mathrm{e}^{0,04t}+19}=f(t).$$

F est donc bien une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;250]$.

(b) Par définition la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50\,;100]$ est $\mu=\dfrac{1}{100-50}\displaystyle\int_{50}^{100}f(t)\mathrm{d}t$.

$$\mu=\frac{1}{50}\left[F(t)\right]_{50}^{100}=\ln(\mathrm{e}^4+19)-\ln(\mathrm{e}^2+19)\simeq 1,03.$$

La hauteur moyenne du plant entre le 50e et le 100e jour est de 1,03 m à 10^{-2} près.

4. D'après le graphique, la vitesse est maximale lorsque la pente (coefficient directeur) de la tangente à la courbe est maximale.
Ce maximum correspond à un maximum de la dérivée, donc quand quand la dérivée de celle-ci (c'est-à-dire la dérivée seconde de f) s'annule.
Or $f''(t)=0 \iff t=25\ln 19$.
D'où $f(25\ln 19)=\dfrac{2}{1+19\mathrm{e}^{-0,04\times 25\ln 19}}=\dfrac{2}{1+19\mathrm{e}^{-\ln 19}}=\dfrac{2}{1+1}=1$.
Cette méthode était trop compliquéée pour un élève mais une calculatrice permettait de trouver que la maximum de de la dérivée était obtenue pour $t\approx 1$.
La vitesse de croissance est maximale quand le plant mesure 1 m.

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Les bonnes réponses sont **b. c. a. b.**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x-2y+3z+5=0$ et donc, par propriété, il a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&-2+t+2t'\\y&=&0-t-2t'\\z&=&-1-t+3t'\end{array}\right.$

Par propriété, le plan (S) passe par F$(-2\,;\,0\,;\,-1)$ et a pour vecteurs de base $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -2+t\\ y & = & -t\\ z & = & -1-t\end{array}\right.$

Par propriété, la droite (D) passe par F$(-2\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, elle est donc clairement contenue dans le plan (S) pour la valeur $t' = 0$.

On donne les points de l'espace M$(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et N$(1\ ;\ -2\ ;\ 9)$.

1. La bonne réponse est **b.** en excluant les trois autres ou en vérifiant directement.

   a. N'est pas un plan mais une droite.

   c. $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t+t'\\ y & = & 1-t-2t'\\ z & = & 1-t-3t'\end{array}\right.$ passe par $(0\,;1\,;1) \notin$ (P) **d.** $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & 1+2t+t'\\ y & = & 1-2t+2t'\\ z & = & -1-t'\end{array}\right.$ passe par $(1\,;1\,;-1) \notin$(P)

   b. $\left\{\begin{array}{l c l} x & = & t+2t'\\ y & = & 1-t+t'\\ z & = & -1-t\end{array}\right.$ passe par le point A$(0\,;1\,;-1)$ qui est élément de (P) car $0-2+3\times(-1)+5=0$

   et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. Or $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u}=0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{v}=0$ donc $\overrightarrow{n}$ normal à deux vecteurs non colinéaires du plan est normal au plan. On a bien une représentation paramétrique du plan (P).

2. La bonne réponse est **c.** « La droite (D) est une droite du plan (P). »

   Remplaçons, pour t quelconque, les coordonnées d'un point de la droite dans l'équation du plan (P). Quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $-2-t-2\times(-t)+3\times(-1-t)+5 = -2-3+5+t+2t-3t = 0$, donc tout point de Δ appartient à (P), la droite est contenue dans (P).

3. La bonne réponse est **a.** « La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales. »

   $\overrightarrow{\text{MN}}\begin{pmatrix}2\\-4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

   donc $\overrightarrow{\text{MN}}\cdot\overrightarrow{u} = 1+2-3=0$ prouve que (MN) est orthogonale à (D).

4. La bonne réponse est **b.** « La droite (Δ) et la droite d'intersection de (P) et (S). »

   On vérifie que la droite Δ est contenue dans chacun des deux plans (qui ne sont pas confondus par ailleurs).

   . Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t-2\times(-2-t)+3\times(-3-t)+5 = t+4+2t-9-3t+5=0$ prouve $(\Delta)\subset$ (P).

   . Soit E le point de Δ de paramètre $t=0$: E$(0\ ;\ -2\ ;\ -3)$ et soit F le point de paramètre $t=-2$: F$(-2\ ;\ 0\ ;\ -1)$. On reconnaît le point de (S) de paramètre $(t=0,\ t'=0)$ donc F $\in$ (S).
   Montrons que E $\in$ (S).
   Résolvons le système $\left\{\begin{array}{l c r} 0 & = & -2+t+2t'\\ -2 & = & -t-2t'\\ -3 & = & -1-t+3t'\end{array}\right.$

En additionnant les lignes (1) et (3) on obtient $5t' = 0$ donc $t' = 0$ et en remplaçant dans les trois équations on obtient bien une seule valeur de $t = 2$.
Cela prouve que $\text{E} \in (\text{P})$ pour $(t = 2,\ t' = 0)$.
Conclusion : les points E et F sont dans (S), donc la droite (Δ) est entièrement contenue dans (S).

La droite (Δ) étant simultanément contenue dans les deux plans (non confondus) est la droite d'intersection.

(*Remarque* : Les réponses **a.** et **c.** pouvaient être éliminées de manière directe, mais la réponse **b.** exclut aussi la réponse **d.**).

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   (a) $z_M = 2 \times \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

   (b) $z_{M'} = -\mathrm{i}z_M = -\mathrm{i}(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = -\mathrm{i} + \mathrm{i}^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

   Module et argument méthode algébrique :

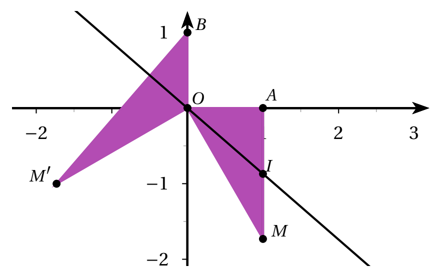
   $|z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ et si l'on nomme θ un argument de $z_{M'}$ alors, par propriété, $\begin{cases} \cos\theta & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta & = & -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ On reconnaît $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$ (modulo 2π).

   Module et argument par la forme exponentielle :

   $|z_{M'}| = |-\mathrm{i}| \times |z_M| = 1 \times |2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}| = 2$

   $\arg(z_{M'}) = \arg(-\mathrm{i}) + \arg(z_M) = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{5\pi}{6}$ (module 2π).

   (c) La figure n'est pas à l'échelle.
   Graphiquement on vérifie les propriétés 1 et 2.



2. Cas général en prenant $z_M = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.

   (a) $z_I = \dfrac{z_A + z_M}{2} = \dfrac{x+1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{y}{2}$.

   (b) $z_{M'} = -\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = y - \mathrm{i}\,x$.

   (c) $I\left(\dfrac{x+1}{2}\,;\,\dfrac{y}{2}\right)$, $\mathrm{B}(0\,;\,1)$ et $M'(y\,;\,-x)$.

   (d) $\overrightarrow{\mathrm{O}I} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B}M'} = \left(\dfrac{x+1}{2}\right) \times y + \left(\dfrac{y}{2}\right) \times (-x-1) = \dfrac{xy}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{xy}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$ donc les droites $(\mathrm{O}I)$ et $(\mathrm{B}M')$ sont perpendiculaires.

   (e) $\mathrm{B}M' = \sqrt{y^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ et d'autre part, $2\mathrm{O}I = 2\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{2}\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ donc

$$2\mathrm{O}I = \mathrm{B}M'.$$

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) On a $A \times U_n = \begin{pmatrix} 0,125 j_n + 0,525 a_n \\ 0,625 j_n + 0,625 a_n \end{pmatrix} = U_{n+1}$.

   (b) un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut). $U_1 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 + 262,5 \\ 125 + 312,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 287,5 \\ 437,5 \end{pmatrix}$.

   Au bout de 1 an il y aura 287 jeunes et 437 adultes.

   $U_2 = A \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 287,5 \\ 437,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35,9375 + 229,688 \\ 179,688 + 273,438 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 265,625 \\ 453,125 \end{pmatrix}$.

   Au bout de 2 ans il y aura 265 jeunes et 453 adultes.

   (c) fonction de A^n et de U_0. Une récurrence simple permet de montrer que quel que soit le naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

2. (a) $Q \times D = \begin{pmatrix} -1.75 & 3 \\ 1,25 & 5 \end{pmatrix}$, puis

   $(Q \times D) \times Q^{-1} = \begin{pmatrix} -0,175 + 0,3 & 0,105 + 0,42 \\ 0,125 + 0,5 & -0,075 + 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,525 \\ 0,625 & 0,625 \end{pmatrix} = A$.

   (b) $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$?

   Initialisation : On a bien $A^1 = Q \times D^1 \times Q^{-1}$ (question précédente).

   Hérédité : Supposons qu'il existe $p > 1$ tel que $A^p = Q \times D^p \times Q^{-1}$.

   Alors $a^{p+1} = A^p \times A = \left(Q \times D^p \times Q^{-1}\right) \times \left(Q \times D \times Q^{-1}\right) = Q \times D^p \times \left(Q^{-1} \times Q\right) \times D \times Q^{-1} =$
   $Q \times D^p \times I \times D \times Q^{-1} = Q \times (D^p \times D) \times Q^{-1} = Q \times D^{p+1} \times Q^{-1}$.

   La formule est donc vraie au rang $p + 1$.

   On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :
   $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

   (c) La matrice D est diagonale, donc :

   $D^n = \begin{pmatrix} -0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-0,25)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (a) Quel que soit le naturel n :

   $U_n = A^n \times U_0 = \left(0,3 + 0,7 \times (-0,25)^n \quad 0,42 - 0,42 \times (-0,25)^n \; 0,5 - 0,5 \times (-0,25)^n \quad 0,7 \;\; + 0,3 \;\; \times (-0,25)^n\right) \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix} =$

   $\begin{pmatrix} 60 + 140 \times (-0,25)^n + 210 - 210 \times (-0,25)^n \\ 100 + -100 \times (-0,25)^n + 350 + 150 \times (-0,25)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 - 70 \times (-0,25)^n \\ 450 + 50 \times (-0,25)^n \end{pmatrix}$.

   Conclusion $\left\{ \begin{array}{lcl} j_n & = & 270 - 70 \times (-0,25)^n \\ a_n & = & 450 + 50 \times (-0,25)^n \end{array} \right.$

   (b) Comme $-1 < -0,25 < 1$, on sait que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (-0,25)^n = 0$, donc :

   $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} j_n = 270$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n = 450$.

   Le nombre d'animaux jeunes va tendre vers 270 et celui des adultes vers 450 au bout de quelques années.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

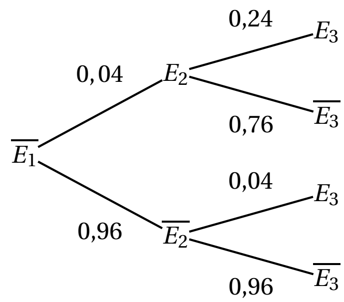
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.



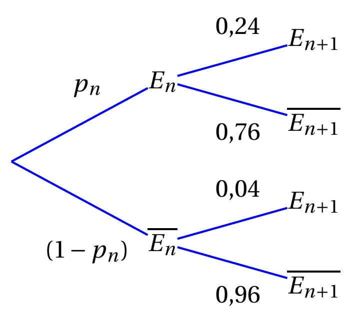
Théorème des probabilités totales : $E_3 = E_2 \cap E_3 \cup \overline{E_2} \cap E_3$ (union d'évènements disjoints)

$p_3 = P(E_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = 0,048$.

(b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

$$\mathrm{P}_{E_3}(E_2) = \frac{\mathrm{P}(E_2 \cap E_3)}{\mathrm{P}(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

2. (a) Complétons l'arbre



(b) En appliquant le théorème des probabilités totales :

$$E_{n+1} = E_n \cap E_{n+1} \cup \overline{E_n} \cap E_{n+1} \text{(union d'évènements disjoints)}$$
$$p_{n+1} = 0,24 p_n + 0,04(1 - p_n) = (0,24 - 0,04) p_n + 0,04 = 0,2 p_n + 0,04$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2 p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2 p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2 u_n$$

donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et la raison $r = 0,2$.

Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$
et donc : $p_n = u_n + 0,05 = 0,05(1 - 0,2^{n-1})$.

(d) Limite de la suite (p_n).
Comme $|0,2| < 1$ alors par théorème : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,05$.

(e) Le nombre J qui est affiché en sortie d'algorithme est le rang du premier terme de la suite (p_n) qui s'approche de la limite 0,05 à 10^{-K} près, où K est un entier fixé au départ.
La convergence de l'algorithme est assurée par l'existence de la limite vue en (d).

3. (a) • Une semaine donnée, on peut définir une épreuve de Bernoulli, où le succès est l'évènement E « un salarié est absent pour maladie. »
• L'état de chaque salarié étant supposé indépendant de l'état des autres, on obtient donc un Schéma de Bernoulli sur les 220 salariés de l'entreprise.
• La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit, par propriété, la loi binomiale $\mathcal{B}(220\ ;\ 0,05)$.
Par propriété,

$$\mu = \mathrm{E}(X) = np = 220 \times 0,05 = 11 \qquad \text{et} \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{220 \times 0,05 \times 0,95} \simeq 3,23.$$

(b) On a bien :
$n \geqslant 30, np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, donc la loi de X peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}((\mu, \sigma^2)$. Donc la loi de $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$.
La probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 » se note
$\mathrm{P}(7 \leqslant X \leqslant 15)$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{7-11}{3,23} \simeq -1,238 \\[2ex] \dfrac{15-11}{3,23} \simeq 1,238 \end{array}\right\} \quad \text{donc} \quad \mathrm{P}(7 \leqslant X \leqslant 15) \approx \mathrm{P}(-1,24 < Z < 1,24)$$

Au moyen de la table fournie :

$$\mathrm{P}(-1,24 < Z < 1,24) = \mathrm{P}(Z < 1,24) - \mathrm{P}(Z < -1,24) = 0,892 - 0,108 = 0,784.$$

À 10^{-2} près, on a donc $\mathrm{P}(7 \leqslant X \leqslant 15) \simeq 0,78$.

Annexe (Exercice 1)