TYPES DE NUMÉRATION

I) Types de numération – Historique

À l'époque préhistorique, les hommes utilisaient leurs doigts pour compter ou effectuer des calculs simples.

L'emploi de symboles pour désigner les nombres apparut en Mésopotamie, vers 2 000 av. J.-C., où l'on a retrouvé des tablettes babyloniennes couvertes de chiffres en base *soixante*.

Puis vinrent les systèmes égyptiens, grecs et romains. C'est en Grèce que fut fondée l'arithmétique théorique par les Pythagoriciens au VI^e siècle av. J.-C.

Les premières formes de notation numérale étaient de simples groupes de traits, chaque trait correspondant au chiffre 1.

On peut classer les types de numération en deux catégories :

a) Numération additive

Dans un système de *numération additive*, chaque nombre est représenté par une juxtaposition de caractères dont la somme (avec parfois des soustractions) est égale au nombre considéré. Ainsi, chez les Aztèques où la vingtaine était symbolisée par une hache, le nombre 60 s'exprimait par trois haches (20 + 20 + 20).

Exemple : « les chiffres romains »

Le système de symboles employé par les Romains permet d'exprimer tous les nombres de 1 à 1 000 000 avec seulement sept symboles :

I = 1	V = 5	X = 10	L = 50
C = 100	D = 500	M = 1000	

Dans le système romain, les chiffres se lisent de gauche à droite, ceux placés à gauche représentant les plus grandes quantités. À leur droite sont placés les caractères figurant des quantités immédiatement inférieures, et ainsi de suite. En général, les symboles sont ajoutés les uns aux autres.

Exo 1 Convertir des nombres suivants :

XLIV	CCCLXVII	MDCXXIX
1958	247	2863

Par ailleurs, une petite barre placée sur un chiffre multiplie le chiffre par mille. Ainsi, il est théoriquement possible d'exprimer n'importe quel nombre entier grâce à l'emploi de ces barres.

Les chiffres romains sont encore utilisés de nos jours, plus de deux mille ans après leur introduction, bien qu'ils soient complètement inadaptés aux calculs écrits rapides.

Les Grecs avaient un système équivalent, dans lequel les « chiffres » étaient représentés par des lettres de leur alphabet.

b) Numération de position

La *numération de position* est fondée sur le principe selon lequel la valeur d'un caractère dépend de sa position dans l'écriture d'un nombre. Ainsi, les seuls chiffres de ce type de numération sont des symboles représentant les unités.

La *base* d'un système de numération est le nombre de symboles nécessaires pour représenter n'importe quel nombre : plus la base est grande, plus le nombre de symboles à manier est élevé ; plus la base est petite, plus l'écriture d'un nombre nécessite de caractères.

Le *système décimal* fut la base la plus courante chez les peuples de l'Antiquité. Ainsi, dès le IV^e millénaire av. J.-C., un symbole spécifique fut adopté pour le nombre « 10 » en Égypte. Grâce à l'ajout de ce deuxième signe, il devenait désormais possible d'exprimer le nombre « 11 » avec seulement deux caractères au lieu de onze.

De même, l'écriture du nombre 99 ne nécessitait plus que 18 symboles, à la place des 99 utilisés jusque-là.

Par la suite, les Égyptiens introduisirent des symboles supplémentaires pour un nombre compris entre 1 et 10, ainsi que pour certains multiples de 10.

D'autres systèmes de notation furent utilisés dans l'Antiquité, puisqu'en fait tout nombre entier non nul peut être pris comme base. Par exemple, les Babyloniens eurent recours au système *sexagésimal* (base *soixante*), les Romains employèrent aussi le système *duodécimal* (base *douze*), les Mayas adoptèrent le système *vicésimal* (base *vingt*).

Dans le système que nous utilisons, il y avait à l'origine neuf *chiffres* « unités » (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9), qui symbolisent les neuf premiers *nombres* ; puis on continue en reprenant le premier (donc 1) que l'on appelle « *dizaine* ».

On obtient alors ensuite « *1 dizaine et 1 unité* », « *1 dizaine et 2 unités* »... puis « *2 dizaines* », « *2 dizaines et 1 unité* »...

La notation reste lourde si on est obligé de conserver les mots *unités*, *dizaines*... (ou même avec des abréviations comme *u*, *d*, *c*...) pour repérer la position du chiffre dans le nombre, comme 1*c* 2*d* 3*u* pour 123.

Si on négligeait ces repérages, il pourrait y avoir confusion : par exemple 1*c* 2*u* et 1*c* 2*d* s'écriraient « 12 » tous les deux.

On remarque donc que la numération de position est grandement simplifiée par l'introduction du *zéro* qui symbolise l'absence de chiffre. Ainsi, 1*c* 2*u* = 102 et 1*c* 2*d* = 120.

Dans le développement de la numération écrite, le zéro apparut bien après l'invention des autres chiffres, non pas comme un *nombre* servant au calcul au même titre que les autres, mais comme une *marque de position* intermédiaire, et surtout une *marque* d'*absence* de chiffre. Il a d'ailleurs un statut de *nombre* seulement depuis le début du XX^e siècle.

Ce système exclut toute ambiguïté de lecture, contrairement aux autres systèmes de numération et apparaît par conséquent comme beaucoup plus puissant pour les calculs.

Aujourd'hui, le système de notation numérale utilisé dans la plupart des pays du monde est le *système décimal arabe*. Mis au point par les Indiens, ce système fut employé en Inde dès le III^e siècle av. J.-C. et introduit dans le monde arabe vers le VII^e siècle apr. J.-C. Les premiers documents attestant de l'usage d'un tel système en Europe datent de 976 apr. J.-C.

Le savant français Gerbert d'Aurillac, connu sous le nom de pape Sylvestre II, vers 982 apr. J.-C., (lorsque le pape siégeait à Avignon), et surtout le mathématicien italien Léonard de Pise, dit Fibonacci, contribuèrent pour beaucoup à l'introduction et à l'utilisation des chiffres arabes en Europe occidentale. Ce dernier diffusa la plupart des connaissances arabes en mathématiques dans son ouvrage *Liber abbaci* (paru en 1202).

Quelques bases de numération :

Systèmes	Bases	Peuples	Causes	Conséquences
binaire	2	–	« oui-non »	informatique
quinaire	5	Aztèques	Doigts d'une main	–
octal	8	–	$(\text{oui-non})^3$	informatique
décimal	10	généralisé	doigts des deux mains	notre base
duo-décimal	12	Romains	4 doigts de 3 phalanges	1 shilling = 12 pence
hexa-décimal	16	–	$(\text{oui-non})^4$	informatique
vicésimal	20	Mayas Celtes	doigts des mains et des pieds	80 = 4 × 20 quatre-vingts
sexa-gésimal	60	Babylo-niens Sumériens	Origine incertaine	1 h = 60 min 1° = 60'

Nous retrouvons encore des vestiges des numérations en base *soixante* dans la mesure des angles ou dans la mesure du temps. La Révolution française a introduit le système décimal pour les mesures de longueur et de poids, mais elle a échoué en ce qui concerne la mesure des angles (un angle droit était alors divisé en 100 *grades*). Elle n'a pas tenté de modifier la mesure du temps.

Ces divers systèmes de numération se sont uniformisés à la longue, suite au développement des communications, pour faire place au système décimal.

Jusque dans les années 1960, le Royaume-Uni avait conservé un système monétaire (hérité du système français) où la *livre* (le *franc*) était subdivisée en 20 *shillings* (les *sous*) eux-mêmes constitués de 12 *pence* (les *deniers*).

Le système binaire, vu par Leibniz comme la représentation philosophique de Dieu (le 1) et du Néant (le 0), ne s'est imposé plus tard que pour l'utilisation des processeurs informatiques.

Exo 2 Compléter les cases vides :

indonésien			
6		5	lima
7			limabelas
50		3	tiga
2	dua		tiga puluh
20	dua puluh	70	tujuh puluh
16	enambelas		tujuhbelas
finnois			
	kuusikymmentä	6	
15			viisi
16	kuusitoista	50	viisikymmentä
19	yhdeksäntoista	90	
swahili			
16	kumi na sita	60	sitini
17			saba
6		70	sabini
	tatu	13	kumi na tatu
aztèque			
50	ome-poualli-on-matlacli	13	matlacli-on-yey
15	caxtulli	20	cem-poualli
6	chica-ce	3	yey
	ome-poualli		ome
10		16	caxtulli-on-ce
1			chica

II) Systèmes de numération – Théorie et exemples

a) Propriété : Soit b un entier strictement supérieur à 1. Alors, pour tout entier n positif, il existe une unique suite d'entiers $(n_0 ; n_1 ; \ldots ; n_p)$ vérifiant :

$$n = \sum_{k=0}^{p} n_k \times b^k ,$$

avec, pour tout $k \in [0 ; p]$, $\mathbf{0 \leq n_k \leq b-1}$.

On peut utiliser la notation :

$$\overline{n_p n_{p-1} \cdots n_1 n_0}^{\,b} = n_p \times b^p + n_{p-1} \times b^{p-1} + \cdots + n_1 \times b + n_0$$

b) Exemples

Avec la base *dix* (base usuelle) :

$$1234 = \overline{1234}^{\,dix} = 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 4$$

Avec la base *cinq*, $\overline{432}^{\,cinq} = 4 \times 5^2 + 3 \times 5 + 2 = 117$

(on les tire du sigma à l'envers, en commençant par $k = p$ et en décroissant d'une unité jusqu'à 0)

c) Utilisation et vocabulaire : Pour $n = 13$ et $b = 2$.

On a : $13 = 6 \times \mathbf{2} + 1$, et $6 = 3 \times \mathbf{2}$, et $3 = 1 \times \mathbf{2} + 1$, donc :

$13 = ((1 \times \mathbf{2} + 1) \times \mathbf{2}) \times \mathbf{2} + 1$

$= 1 \times \mathbf{2}^3 + 1 \times \mathbf{2}^2 + 0 \times \mathbf{2}^1 + 1 \times \mathbf{2}^0$

De même que $1 \times \mathbf{10}^3 + 2 \times \mathbf{10}^2 + 3 \times \mathbf{10}^1 + 1 \times \mathbf{10}^0$ vaut 1234 dans la base *dix*, on pourra écrire que le nombre s'écrivant 13 dans la base *dix*, c'est-à-dire $\overline{13}^{\,dix}$, s'écrit $\overline{1101}^{\,deux}$ dans la base *deux*.

On écrit les bases en toutes lettres, pour éviter les confusions avec les écritures selon les bases.

Lorsque la base b est strictement supérieur à 10, on utilise les premières lettres majuscules de l'alphabet ; par exemple, dans le système *hexadécimal* (base *seize*), il utilise 16 symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A* (*dix*), *B* (*onze*), *C* (*douze*), *D* (*treize*), *E* (*quatorze*) et *F* (*quinze*).

d) Exemple

En base *douze*, $\overline{8B5}^{\,douze} = 8 \times 12^2 + \mathbf{11} \times 12 + 5 = 1289$

Exo 3 Compléter le tableau suivant, en écrivant les premiers entiers dans quelques bases de numération :

deux	*quatre*	*huit*	*dix*	*douze*	*seize*
			1		
			2		
			3		
			4		
			5		
			6		
			7		
			8		
			9		
			10		
			11		
			12		
			13		
			14		
			15		
			16		
			17		
			18		
			19		
			20		

e) Le système binaire et ses dérivés

Le système *binaire* (base *deux*) joue un rôle important dans la société par l'intermédiaire de l'informatique. En effet, tout nombre « binaire » peut, par exemple, correspondre aux positions d'une série d'interrupteurs marche-arrêt (*on-off*).

La position marche (*on*) correspond à 1 et la position arrêt (*off*) à 0.

Les informations sont codées à partir de *chiffres binaires*, en anglais *binary digits* et en abrégé *bits*.

Le *code ASCII* (*American Standard Code for Information Interchange*) définit un codage des caractères (chiffres, lettres, symboles) grâce à un nombre binaire à huit chiffres.

Quelques exemples :

Car	Déc	Binaire	Oct	Hex
0	48	00110000	60	30

Car	Déc	Binaire	Oct	Hex
1	49	00110001	61	31

Car	Déc	Binaire	Oct	Hex
A	65	01000001	101	41

Car	Déc	Binaire	Oct	Hex
B	66	01000010	102	42

Car	Déc	Binaire	Oct	Hex
a	97	01100001	141	61

Car	Déc	Binaire	Oct	Hex
b	98	01100010	142	62

Car	Déc	Binaire	Oct	Hex
α	224	11100000	341	E0

Car	Déc	Binaire	Oct	Hex
β	225	11100001	342	E1

Les systèmes <u>*octal*</u> ($8 = 2^3$) et <u>*hexadécimal*</u> ($16 = 2^4$) sont des regroupements des chiffres de la base binaire par 3 et par 4 (*voir* exemple plus loin : exercice **12**).

Les trois opérations classiques que sont l'addition, la soustraction et la multiplication, s'effectuent de la même manière que dans le système décimal.

Exo 4 Effectuer en base *deux* les opérations suivantes :

1001011	10101	1101
+ 1101001	− 1110	× 101

Exo 5 Compléter les tables d'addition et de multiplication de la numération ternaire (base *trois*) :

+	**0**	**1**	**2**
0			
1			
2			

×	**0**	**1**	**2**
0			
1			
2			

Exo 6 Effectuer en base duodécimale (*douze*) les opérations suivantes :

237	81A	12
+ 8A4	− 679	× 3B

Exo 7 Calculer en base *quatre* : 231 + 130 − 32

III) Changement de base

a) Écriture en base *dix* d'un nombre *n* écrit en base *b*.

Exo 8 Exprimer les nombres suivants en base *dix*.

$\overline{101110101}^{deux}$; $\overline{32142}^{cinq}$; $\overline{5A3B}^{douze}$; $\overline{4B8C}^{douze}$

b) Écriture en base *b* d'un nombre *n* écrit en base *dix*.

Méthode naturelle mais plus longue : Calculer, en base *dix*, les puissances de *b* inférieures ou égales à *n*. Puis retrancher la plus grande puissance de *b* inférieure ou égale à *n* autant de fois que possible.

Recommencer avec le reste obtenu, et les puissances de *b* inférieures.

Explication de la méthode sur un exemple :

Exprimer $\overline{1263}^{dix}$ en base *huit*.

$8^0 = 1$	$8^1 = 8$	$8^2 = 64$	$8^3 = 512$	$8^4 = 4096$
$1263 = \underline{\mathbf{2}} \times 8^3 + 239$		$239 = \underline{\mathbf{3}} \times 8^2 + 47$		
$47 = \underline{\mathbf{5}} \times 8^1 + 7$		$7 = \underline{\mathbf{7}} \times 8^0 + 0$		

Donc $1263 = \underline{\mathbf{2}} \times 8^3 + \underline{\mathbf{3}} \times 8^2 + \underline{\mathbf{5}} \times 8^1 + \underline{\mathbf{7}} \times 8^0$

Ainsi $\overline{1263}^{dix} = \overline{2357}^{huit}$.

Méthode artificielle mais plus rapide : Diviser *n* par *b,* puis diviser ce quotient par *b,* puis le nouveau quotient obtenu par *b,* et ainsi de suite jusqu'à obtention du quotient 0.

Les restes successifs sont les chiffres de *n* exprimés en base *b*, le premier reste étant le chiffre des unités...

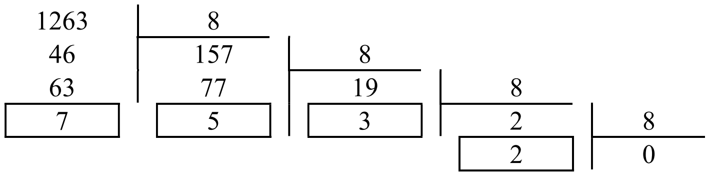
Explication de la méthode sur l'exemple :

On a vu que $1263 = \underline{\mathbf{2}} \times 8^3 + \underline{\mathbf{3}} \times 8^2 + \underline{\mathbf{5}} \times 8^1 + \underline{\mathbf{7}} \times 8^0$

c'est-à-dire $1263 = 8 \times (\underline{\mathbf{2}} \times 8^2 + \underline{\mathbf{3}} \times 8 + \underline{\mathbf{5}}) + \underline{\mathbf{7}}$

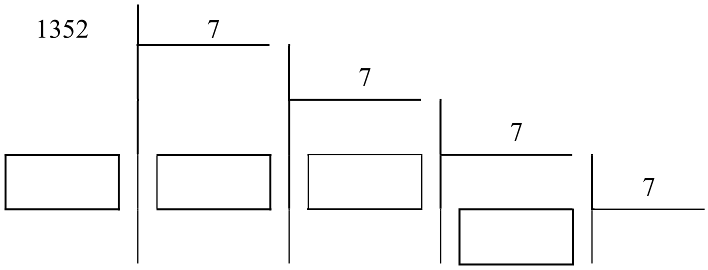
ou encore $1263 = 8 \times [8 \times (8 \times \underline{\mathbf{2}} + \underline{\mathbf{3}}) + \underline{\mathbf{5}}] + \underline{\mathbf{7}}$

donc on peut écrire :



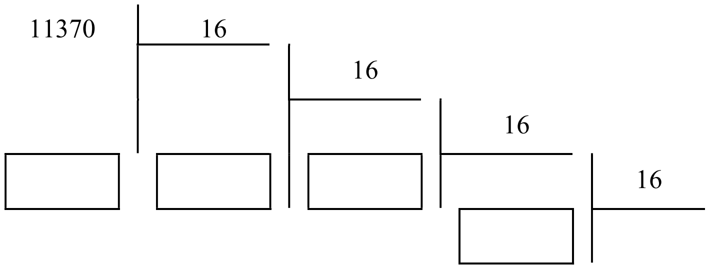
On retrouve ainsi $\overline{1263}^{dix} = \overline{2357}^{huit}$. Attention de bien sélectionner les restes <u>de droite à gauche</u>.

Exo 9 Exprimer $\overline{1352}^{dix}$ en base *sept*.



Donc $\overline{1352}^{dix} = \overline{\ldots\ldots\ldots}^{sept}$.

Exo 10 Exprimer $\overline{11370}^{dix}$ en base *seize*.



Donc $\overline{11370}^{dix} = \overline{\ldots\ldots\ldots}^{seize}$.

c) Écriture en base *b'* d'un nombre *n* écrit en base *b*.

Utiliser la base *dix* comme base intermédiaire.

Exo 11 Exprimer $\overline{31203}^{quatre}$ en base *neuf.*

Exo 12 Déterminer l'entier *x* tel que $\overline{2565}^{sept} = \overline{5A3}^{x}$.

Déterminer l'écriture de ce nombre en base *douze*.