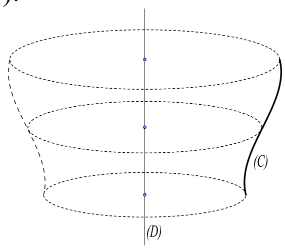
SURFACES DANS L'ESPACE

Dans tout ce chapitre, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

I) Surface de révolution

- **Définition D1** : Soit (*S*) une surface et (*D*) une droite. On dit que (*S*) est une *surface de révolution* d'axe (*D*) lorsque, pour tout plan (*P*), perpendiculaire à (*D*), l'intersection de (*S*) et de (*P*) est soit l'ensemble vide, soit un ou plusieurs cercle(s) de centre le point d'intersection de (*D*) avec (*P*).
- **En particulier**, on obtient une surface de révolution grâce à la rotation autour d'un axe (*D*) d'une courbe (*C*) plane incluse dans un plan contenant (*D*).



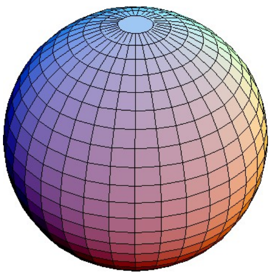
II) Exemples de surfaces et leurs équations

1) *Le plan*

- **D2** : Un *plan* (*P*) est défini par la donnée d'un *point* *A* inclus dans (*P*) et d'un *vecteur normal* $\vec{n}$, vecteur directeur des droites perpendiculaires à (*P*). On sait que $M \in (P)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
- **Propriété P1** : Les points *M*, de coordonnées $\left(x\,;y\,;z\right)$, sont dans (*P*) si et seulement s'il existe quatre réels *a*, *b*, *c* et *d*, avec *a*, *b* et *c* non tous nuls, tels que : $\boxed{ax+by+cz+d=0}$. Le vecteur de coordonnées *a*, *b* et *c* est colinéaire à $\vec{n}$.

2) *La sphère*

- **D3** : Une *sphère* (*S*), de *centre* $\Omega\left(a\,;b\,;c\right)$ et de *rayon* *R*, réel strictement positif, est l'ensemble des points tels que $\Omega M = R$.
- **P2** : Les points $M\left(x\,;y\,;z\right)$ sont dans (*S*) si et seulement si : $\boxed{\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2}$



- Une sphère est un solide de révolution obtenu en faisant tourner autour d'une droite un demi-cercle dont les extrémités sont sur cette droite.

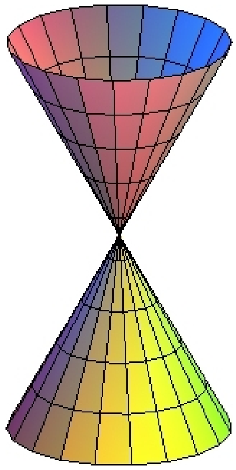
3) *Le cylindre de révolution*

- **D4** : Un *cylindre de révolution* (*C*) d'*axe* la droite (*D*) et de *rayon* *R* est l'ensemble des points *M* dont la distance à (*D*) est égale à *R*, réel strictement positif, donc tels que $HM = R$, où *H* est le projeté orthogonal de *M* sur (*D*).
- **P3** : Si on choisit $(D)=\left(O\,;\vec{k}\right)$, les points $M\left(x\,;y\,;z\right)$ sont dans (*C*) si et seulement si : $\boxed{x^2+y^2=R^2}$.

- Un cylindre de révolution s'obtient en faisant tourner autour d'un axe une droite strictement parallèle.
- **Remarques** : Un cylindre de révolution, comme les autres surfaces de révolution à venir, ont une « hauteur » infinie, contrairement aux cylindres vus habituellement pour les calculs d'aires et de volumes.
- Malgré l'absence de la coordonnée *z* (la *cote*) dans l'écriture de l'équation, il s'agit bien ici d'un cylindre dans l'espace et non d'un cercle dans le plan.

4) *Le cône de révolution*

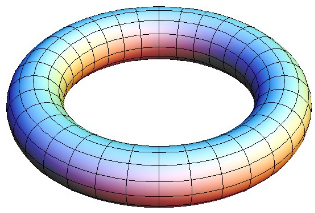
- **D5** : Un *cône de révolution* (*C*) d'*axe* la droite (*D*), de *sommet* *S* appartenant à (*D*) et d'*angle au sommet* $\alpha \in \left]0\,;\pi\right[$ est, à part *S*, l'ensemble des points *M* tels que $\widehat{HSM} = \dfrac{\alpha}{2}$, où *H* est le projeté orthogonal de *M* sur (*D*).
- **P4** : Si on choisit *S* comme origine du repère et si $(D)=\left(S\,;\vec{k}\right)$, les points $M\left(x\,;y\,;z\right)$ sont dans (*C*) si et seulement si : $\boxed{x^2+y^2=z^2\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.



- **Attention !** L'**angle au sommet** α est le double de celui utilisé dans l'équation.
- Un cône de révolution s'obtient en faisant tourner autour d'un axe une droite sécante avec cet axe.
- **Remarque** : Outre la remarque déjà faite sur la « hauteur » infinie, un cône tel qu'il est défini ici est en fait constitué de deux « cônes », opposés par le sommet, définis habituellement pour les calculs.

5) *Le tore*

- **D6** : Un *tore* s'obtient en faisant tourner autour d'un axe un cercle sans intersection avec l'axe.
- **Pour information**, avec *a* comme rayon « majeur » et *b* comme rayon « mineur », son équation peut être : $\left(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2\right)^2 = 4a^2\left(x^2+y^2\right)$



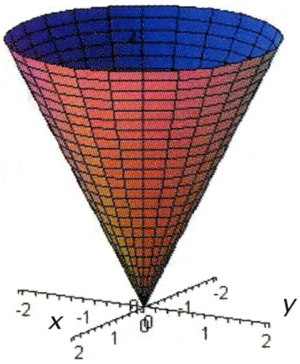
III) Surface représentative d'une fonction à deux variables

1) *Définition*

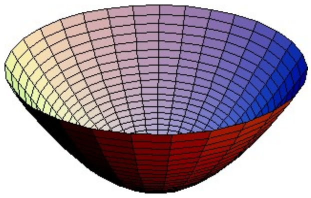
- **D7** : On appelle *fonction à deux variables* une correspondance qui, à tout couple $\left(x\,;y\right)$ de réels appartenant chacun à un intervalle de **R**, associe le réel *z*, noté $h\left(x\,;y\right)$. On appelle *surface représentative* de *h* l'ensemble des points *M* de coordonnées $\left(x\,;y\,;z\right)$ tels que $z = h\left(x\,;y\right)$.
- **Exemple** : Si on pose $h\left(x\,;y\right)=2x-3y+4$, la surface est le plan d'équation : $2x-3y-z+4=0$

2) *Autres surfaces*

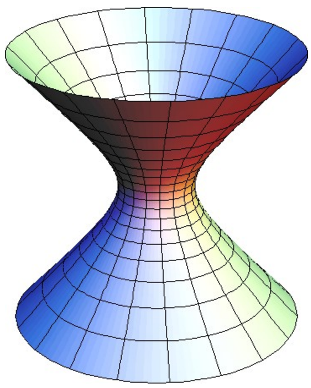
- **P5** : Si on pose
  $h(x\,;y)=\sqrt{x^2+y^2}$,
  la surface est le « demi-cône » d'équation :
  $z=\sqrt{x^2+y^2}$, donc
  $x^2+y^2=z^2$ et $z\geq 0$.
  (ici, $\alpha=\frac{\pi}{2}$)



- **D8** : Si on pose
  $h(x\,;y)=x^2+y^2$,
  la surface correspondante est le *paraboloïde de révolution* d'équation : $z=x^2+y^2$, qui sert de forme aux antennes dites « paraboliques ».



- **D9** : La surface d'équation
  $x^2+y^2-z^2=1$ est un
  hyperboloïde de révolution à une nappe.
  Si on pose
  $h(x\,;y)=\sqrt{x^2+y^2-1}$,
  cette surface est la réunion des surfaces représentatives des fonctions h et de $-h$.
  C'est la forme donnée à certains châteaux d'eau et centrales diverses.



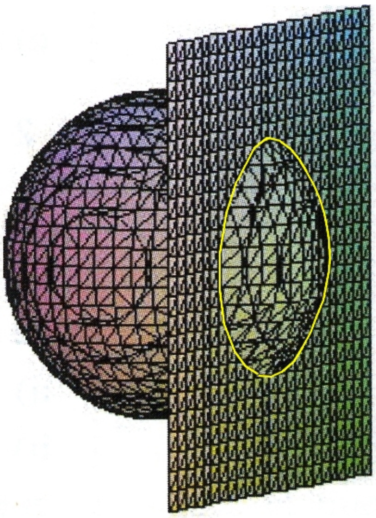
IV) Sections planes de quelques surfaces

1) *Définitions* : Soit (S) une surface et (P) un plan.

- **D10** : On appelle *section plane* de (S) par (P) l'intersection de (S) et de (P).
- **D11 :** On appelle *sections horizontales* de (S) les sections planes parallèles au plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
- **Remarque** : La section horizontale de la surface d'équation $z=h(x\,;y)$ par le plan d'équation $z=k$ s'appelle la *ligne de niveau k* de la fonction h.
- **D12 :** On appelle *sections verticales* de (S) les sections planes parallèles à la droite $(O\,;\vec{k})$.
- **D13 :** On appelle *génératrices* de (S) les droites contenues dans (S).
- **Exemple** : La photo ci-contre montre quelques génératrices d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, armatures d'un château d'eau.

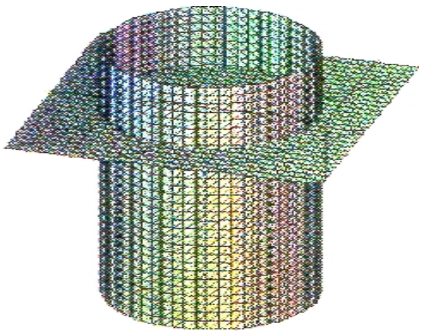
2) *Sections planes de sphères*

- **P6** : Les sections planes d'une **sphère** de centre Ω et de rayon R sont :
  - l'ensemble vide si le plan est à une distance d de Ω strictement supérieure à R
  - un point s'il y a tangence, c'est-à-dire si $d=R$
  - un cercle si $d<R$

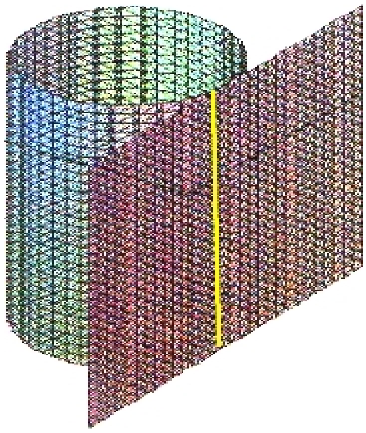


3) *Sections planes de cylindres*

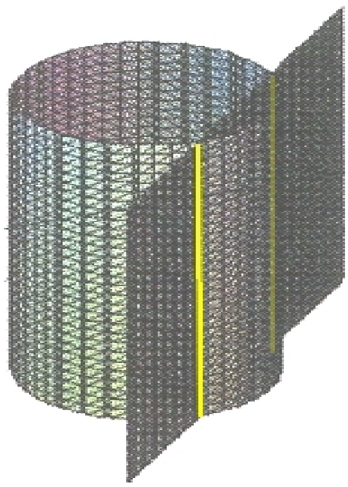
- Soit un **cylindre de révolution** d'axe la droite $(D)=(O\,;\vec{k})$ et de rayon R.
- **P7** : Les sections horizontales sont des cercles de rayon R dont les centres sont sur (D).



- **P8** : Les sections verticales sont :
  - l'ensemble vide si (P) est à une distance d de (D) strictement supérieure à R
  - une droite parallèle à (D) s'il y a tangence, c'est-à-dire si $d=R$

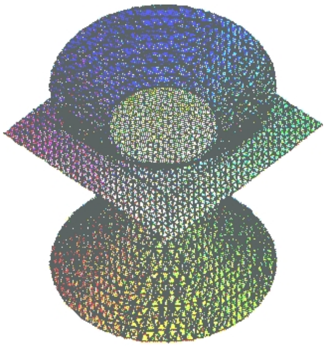


  - la réunion de deux droites parallèles à (D) si $d<R$

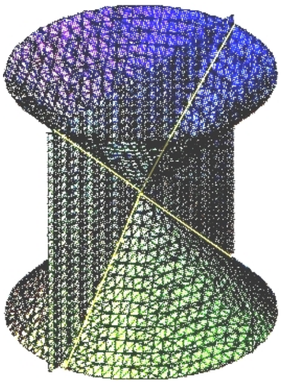


4) *Sections planes de cônes*

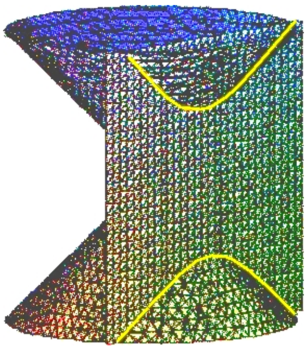
- Soit le **cône de révolution** d'axe la droite $(D)=\left(O\,;\vec{k}\right)$ et d'équation $x^2+y^2-a^2z^2=0$.



- **P9** : Les sections horizontales avec le plan d'équation $z=h$ sont :
  - ➢ le <u>point</u> O, sommet du cône, lorsque $h=0$
  - ➢ le <u>cercle</u> de centre de coordonnées $(0\,;0\,;h)$ et de rayon $|ah|$ si $h\neq 0$



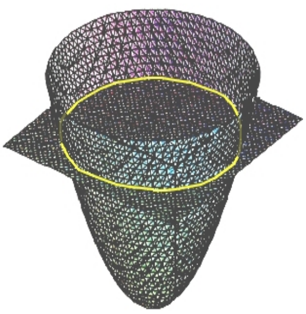
- **P10** : Les sections verticales avec un plan parallèle à l'axe $\left(O\,;\vec{k}\right)$, d'équation $ax+by+c=0$ sont :
  - ➢ la <u>réunion de deux droites sécantes</u> en O si $c=0$



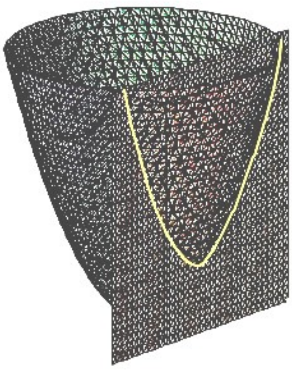
  - ➢ <u>une hyperbole</u> si $c\neq 0$

5) *Sections planes de paraboloïdes de révolution*

- Soit la **paraboloïde de révolution** d'axe la droite $(D)=\left(O\,;\vec{k}\right)$ et d'équation $x^2+y^2=az$, $(a>0)$.



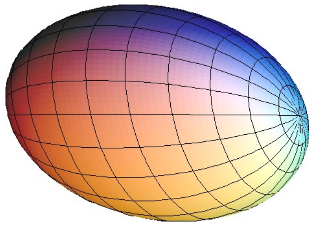
- **P11** : Les sections horizontales avec le plan d'équation $z=h$ sont :
  - ➢ l'ensemble vide lorsque $h<0$,
  - ➢ le <u>point</u> O, sommet du cône, lorsque $h=0$,
  - ➢ le <u>cercle</u> de centre de coordonnées $(0\,;0\,;h)$ et de rayon $\sqrt{ah}$ si $h>0$



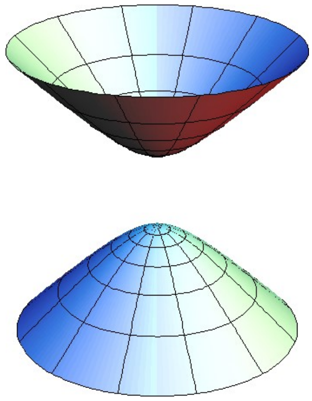
- **P12** : Les sections verticales sont des <u>paraboles</u>.

V) Quelques autres surfaces et leurs équations

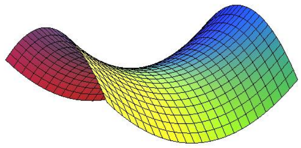
- **Ellipsoïde de révolution** (ou « ballon de rugby ») :
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



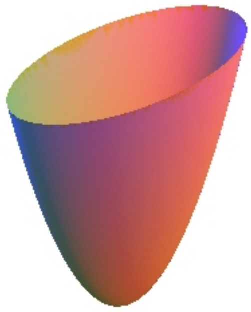
- **Hyperboloïde de révolution à deux nappes**
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



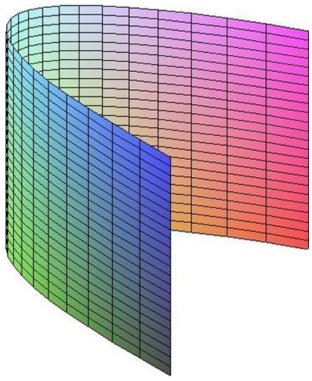
- **Paraboloïde hyperbolique** (ou « selle de cheval »)
  Selon le repère :
$$\frac{z}{h}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\ \textbf{ou}\ xy=pz$$



- **Paraboloïde elliptique**
$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



- **Cylindre parabolique**
$$y=\frac{x^2}{2p}$$



- **Cylindre hyperbolique**
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$