SIMILITUDES PLANES

(Dans tout ce chapitre, on se place dans le plan.)

A) Rappels sur les isométries

I) Isométries

1) Définition D1 : Une *isométrie plane* f est une transformation (application bijective) du plan dans lui-même qui conserve les distances, c'est-à-dire :

Pour tous points A et B, dont les images respectives par f sont A' et B', alors : $A'B' = AB$

- **Exemples** : Les translations, rotations et réflexions (symétries axiales orthogonales) sont des isométries.

2) Propriétés

- **P1** : La composée de deux isométries est aussi une isométrie.
- **P2** : La réciproque d'une isométrie est une isométrie.
- **P3** : Une isométrie conserve le produit scalaire, c'est-à-dire : pour tous points A, B et C, d'images respectives A', B' et C' par une isométrie f, on a :
$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$
- **P4** : Une isométrie conserve les angles géométriques, c'est-à-dire (points distincts) : $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$
- **P5** : L'image d'une droite est une droite (pas toujours parallèle), l'image d'un segment est un segment de même longueur, l'image d'un cercle est un cercle de centre l'image du centre et de même rayon.
- **P6** : Une isométrie *conserve la parallélisme* et *l'orthogonalité*, c'est-à-dire : les images de deux droites parallèles sont des droites elles-mêmes parallèles, et celles de deux droites perpendiculaires sont des droites elles-mêmes perpendiculaires. **Attention !** cela ne signifie pas que l'image d'une droite est toujours une droite parallèle.

3) Déplacements du plan

- **D2** : On appelle *déplacement* du plan toute *isométrie* (dite *positive*) qui conserve les angles orientés, c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{A'B'} ; \overrightarrow{A'C'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$.

- **T1** : Les déplacements du plan sont : les translations et les rotations
- **P7** : L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe λ est : $z' = z + \lambda$
- **P8** : L'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe z_0 et d'angle de mesure θ est :
$$z' - z_0 = e^{i\theta}\left(z - z_0\right)$$

- **P9** : La composée de deux déplacements est un déplacement. Plus précisément, la composée :
  - de deux translations est une translation
  - d'une rotation est une translation autre que l'identité est une rotation de même angle
  - de deux rotations d'angles α et β est :
    - une translation si $\alpha + \beta \equiv 0[2\pi]$
    - une rotation d'angle α + β dans les autres cas

4) Antidéplacements du plan

- **D3** : On appelle *antidéplacement* du plan toute *isométrie* (dite *négative*) qui transforme les angles orientés en leur opposé, c'est-à-dire :
$$\left(\overrightarrow{A'B'} ; \overrightarrow{A'C'}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)[2\pi].$$
- **Exemple** : La réflexion est un antidéplacement.
- **P10** : L'écriture complexe de la réflexion d'axe celui des réels est : $z' = \overline{z}$.
- **P11** : La composée de deux réflexions, qui sont des antidéplacements, est un déplacement.
Plus précisément, la composée $s_{(D')} \circ s_{(D)}$ de deux réflexions d'axes respectifs (D) et (D') est :
  - une translation si (D) et (D') sont parallèles.
  Son vecteur est normal à ces deux droites, et vaut le double de celui qui transforme (D) en (D').
  - une rotation si (D) et (D') sont sécants en Ω.
  Son centre est Ω, et son angle est le double de l'un des angles $\left(\overrightarrow{\Omega M} ; \overrightarrow{\Omega M'}\right)$, où M est sur (D) et M' sur (D'), tous deux autres que Ω.

5) Autres propriétés *(pour information)*

- L'écriture complexe de la réflexion d'axe la droite d'équation $y = \left(\tan\theta\right)x$ est :
$$z' = e^{2i\theta}\,\overline{z}.$$
- Toute translation t peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes parallèles dont les axes ont le vecteur de t comme vecteur normal.
L'un des deux axes peut-être choisi arbitrairement.
De même, toute rotation r peut s'écrire comme la composée de deux réflexions d'axes sécants, de point d'intersection le centre de r.
L'un des deux axes peut-être choisi arbitrairement.
- Un antidéplacement est la composée d'un déplacement et d'une réflexion.
Les antidéplacements sont donc constitués des composées $t \circ s$ et $r \circ s$, où t, r et s sont respectivement des translation, rotation et réflexion.
- En associant les deux propriétés précédentes, on peut montrer que l'ensemble des antidéplacements est constitué des réflexions et de la composée commutative $t \circ s = s \circ t$ d'une réflexion s et d'une translation t non identique dont le vecteur dirige l'axe de s ; une telle transformation s'appelle une *symétrie glissée*. Elle n'a pas de points invariants.

II) Homothétie

1) Définition D4 : Soit Ω un point et k un réel <u>non nul</u>.
Une <u>*homothétie*</u> h, de centre Ω et de rapport k, est définie par :

$$M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}.$$

- **Cas particuliers** : Pour $k = 1$, l'homothétie est l'<u>*identité*</u>, ou encore <u>*application identique*</u>, telle que, pour tout point M, on a : $M' = M$.
Pour $k = -1$, c'est la <u>symétrie</u> de centre Ω.

2) Propriétés

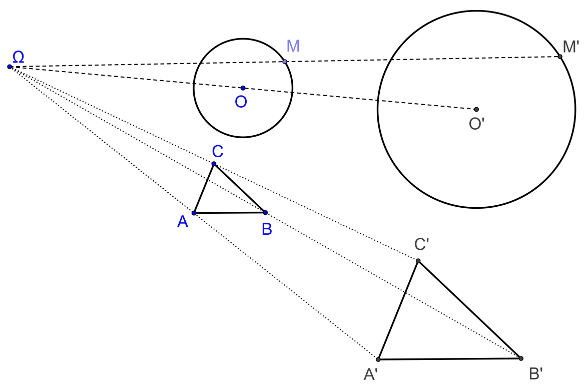
- **P12** : Si les points M et N ont pour images respectives M' et N', alors : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$
- **P13** : Sauf lorsque $k = 1$ ou $k = -1$, l'homothétie ne conserve pas les distances (donc n'est pas une isométrie), mais cependant elle conserve les proportions, propriété caractéristique des <u>similitudes</u>, dont l'étude est l'objet de ce chapitre.
- **P14** : Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2.
- **P15** : L'homothétie est bijective et $h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}$
- **P16 :** La composée de deux homothéties de rapport k_1 et k_2 est :
  - ➢ une <u>translation</u> lorsque $k_1 \times k_2 = 1$
  - ➢ une <u>homothétie</u> de rapport $k_1 \times k_2$ sinon
- **En particulier** : La composée (commutative) de deux homothéties de même centre est l'homothétie de même centre et de rapport le produit des rapports

$$h_{\Omega,k'} \circ h_{\Omega,k} = h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k'} = h_{\Omega,k'k}$$

- **P17** : L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe z_0 et de rapport k est :

$$z' - z_0 = k(z - z_0)$$

- **P18** : L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.
- **P19** : L'image du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre $h(A)$ et de rayon $|k|R$.



B) Similitudes

I) Définition d'une similitude

- **Définition D5** : On appelle <u>*similitude du plan*</u> toute transformation σ du plan dans lui-même qui <u>conserve les rapports de distances</u>, c'est-à-dire :
Pour tous points A, B, C et D, avec $A \neq B$ et $C \neq D$, dont les images respectives par σ sont A', B', C' et D', alors : $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB}{CD}$

- **T2** : Une transformation σ est une similitude si et seulement s'il existe un unique réel <u>k **strictement positif**</u> tel que, pour tous points A et B, d'images respectives A' et B' par σ, on a : $A'B' = k\,AB$

- Le réel k est appelé le <u>*rapport*</u> de la similitude.
- **Deux exemples importants** :
Une <u>homothétie</u> de rapport k est une similitude de rapport $|k|$ (ne pas oublier les valeurs absolues !).
Une <u>isométrie</u> est une similitude de rapport 1.

II) Premières propriétés des similitudes

- **P20** : La composée de deux similitudes de rapports k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 \times k_2$.
- **Généralisation :** La composée de plusieurs similitudes est une similitude.
- **P21** : La réciproque d'une similitude (qui existe puisqu'une similitude est bijective) de rapport k est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.
- **P22** : La composée d'une similitude de rapport k et d'une homothétie de rapport $\dfrac{1}{k}$ est une isométrie.
- **Conséquence** : Toute similitude σ_k de rapport k peut être considérée (et de plusieurs façons) comme la composée d'une homothétie h_k de rapport k et d'une isométrie f, sous la forme $\sigma_k = h_k \circ f$ ou $\sigma_k = f \circ h_k$.
Les propriétés qui suivent seront souvent de simples conséquences des propriétés vues dans les paragraphes sur les isométries et les homothéties.

III) Effets d'une similitude

1) Conservation des angles géométriques

- **P23** : Soit une similitude σ de rapport k.
Pour tous points A, B et C, d'images respectives A', B' et C' par σ, on a : $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = k^2\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$
- **P24** : Une similitude <u>conserve les angles géométriques</u>, c'est-à-dire, *(points distincts)* :

$$\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$$

- **Conséquences :** Une similitude transforme trois points alignés en trois points alignés.
Si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, alors les droites $(A'B')$ et $(A'C')$ le sont aussi.

2) Conservation du barycentre

- **T3** *(démonstration non exigible)* : Une similitude conserve le barycentre, c'est-à-dire :
si $\{(A_i\,;\alpha_i), i\in[\![1\,;n]\!]\}$ est un système de points pondérés dont la somme des coefficients $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ est non nul, et dont le point *G* est le barycentre, alors $G'=\sigma(G)$, image de *G* par une similitude σ est le barycentre de $\{(\sigma(A_i)\,;\alpha_i), i\in[\![1\,;n]\!]\}$.

3) Image de configurations par une similitude

- **P25** : L'image de la droite (AB) par σ est la droite $(A'B')$, avec $A'=\sigma(A)$ et $B'=\sigma(B)$.
- **P26** : L'image du segment $[AB]$ est de même le segment $[A'B']$, avec $A'=\sigma(A)$ et $B'=\sigma(B)$.
- **P27** : L'image du cercle de centre Ω et de rayon *R* est le cercle de centre $\sigma(\Omega)$ et de rayon *kR*.

IV) Similitudes directes

1) Définition

- **D6** : Une *similitude directe* σ est une similitude qui conserve les angles orientés, c'est-à-dire :
Pour tous points *A*, *B*, *C* et *D*, avec $A\neq B$ et $C\neq D$, d'images respectives *A'*, *B'*, *C'* et *D'* par σ, alors :
$$\left(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{C'D'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right)\ [2\pi]$$
- **Exemples** : Les translations, les homothéties et les rotations sont des similitudes directes.

2) Écriture complexe d'une similitude directe

- **P28** : Soit *P*, *Q* et *R* trois points distincts deux à deux, dont les images respectives par une similitude directe σ sont *P'*, *Q'* et *R'*, alors leurs affixes vérifient :
$$\frac{r'-p'}{q'-p'}=\frac{r-p}{q-p}$$

- **T4** : *(Première partie)*
Soit deux nombres complexes *a* et *b*, avec *a* non nul. Alors l'application σ du plan dans lui-même qui, au point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe :
$z'=a\,z+b$ est une similitude directe de rapport $|a|$.
- **T5** *(Deuxième partie)*
Soit σ une similitude directe qui, au point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe *z'*. Alors il existe deux nombres complexes *a* et *b*, avec *a* non nul, tels que :
$$z'=a\,z+b$$

- **D7** : L'égalité $z'=a\,z+b$ est appelée l'*écriture complexe* de la similitude directe σ, dont le rapport est donc $|a|$.

- **T6** : Soit les points *A*, *B*, *A'* et *B'*, avec $A\neq B$ et $A'\neq B'$. Alors il existe une unique similitude directe σ telle que $\sigma(A)=A'$ et $\sigma(B)=B'$.

3) Angle d'une similitude directe

- **P29** : Soit σ une similitude directe. Soit les points *A*, *B*, *C* et *D*, avec $A\neq B$ et $C\neq D$, dont les images respectives par σ sont *A'*, *B'*, *C'* et *D'*, alors :
$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A'B'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{C'D'}\right)\ [2\pi]$$
- **D8** : Avec les notations précédentes, on appelle *angle* d'une similitude directe l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A'B'}\right)$.
- **T7** : Soit σ la similitude directe d'équation complexe $z'=a\,z+b$, alors σ est la similitude directe :
d'angle $\theta\equiv\arg(a)\ [2\pi]$ et de rapport $|a|$.

4) Exemples classiques

- Une translation est une similitude directe de rapport 1 et d'angle nul.
- Une homothétie de rapport *k* est une similitude directe de rapport $|k|$ et d'angle $\arg(k)$,
donc d'angle 0 si $k>0$ et d'angle π si $k<0$.
- Une rotation de centre Ω et d'angle θ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle θ.

5) Propriétés des similitudes directes

- **P30** : La composée de deux similitudes directes σ_1 et σ_2 de rapports respectifs k_1 et k_2 et d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est une similitude directe $\sigma_2\circ\sigma_1$ de rapport $k_1\times k_2$ et d'angle $\theta_1+\theta_2$.
- **P31** : La réciproque d'une similitude directe σ de rapport *k* et d'angle θ est une similitude directe σ^{-1} de rapport $1/k$ et d'angle $-\theta$.

V) Classification des similitudes directes

1) Notion de point invariant

- **D9** : Soit *f* une application. On dit qu'un point Ω est *invariant* par *f* si et seulement si $f(\Omega)=\Omega$.
On dit aussi que Ω est un *point fixe* de *f*.

- **T8** : La seule similitude du plan ayant au moins trois points invariants non alignés est l'*identité*, qui, à tout point *M*, associe le point *M* lui-même.

2) Décomposition canonique d'une similitude directe grâce à son équation complexe

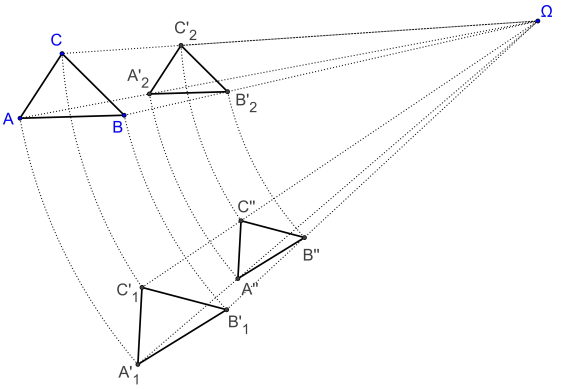
- **T9** : Soit σ la similitude directe d'équation complexe $z'=az+b$, donc d'angle $\theta\equiv\arg(a)\ [2\pi]$ et de rapport $k=|a|$. On a les deux cas suivants :
  - Si $a=1$, alors σ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe *b*. Si $b=0$, alors σ est l'identité, sinon σ n'a pas de points invariants.

- Si $a \neq 1$, σ admet un unique point invariant Ω, d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. Le point Ω est appelé le *centre* de la similitude directe, qui peut alors s'écrire comme la composée commutative

$$h \circ r = r \circ h \ :$$

  - de l'homothétie h de centre Ω et de rapport $|a|$
  - de la rotation r de centre Ω et d'angle $\arg(a)$

- **Remarque** : L'écriture complexe $z' = az + b$ peut alors se présenter sous la forme $z' - \omega = a(z - \omega)$, donc sous la forme : $z' - \omega = |a| e^{i\arg(a)}(z - \omega)$
On retrouve bien la composée :
  - de l'homothétie définie par $z' - \omega = k(z - \omega)$
  - et de la rotation définie par $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

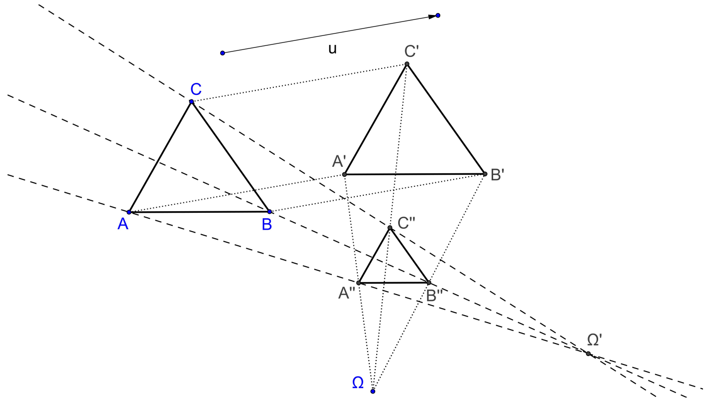


(*dessin avec k = 0,75 et* $\theta = \pi/6$)

Le triangle (ABC) a pour image $(A_1'B_1'C_1')$ par la rotation *r*, et ce dernier a pour image $(A"B"C")$ par l'homothétie *h*. Le triangle (ABC) a pour image $(A_2'B_2'C_2')$ par l'homothétie *h*, et ce dernier a pour image à nouveau $(A"B"C")$ par *r*.
On retrouve bien $h \circ r = r \circ h$.

3) Décomposition canonique en tant que composée d'une homothétie et d'un déplacement

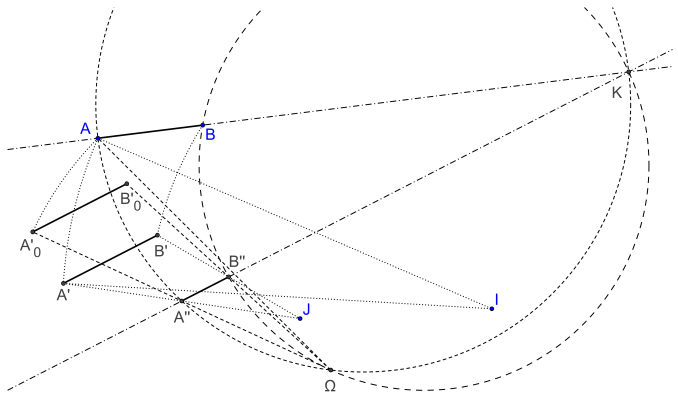
- **T10** : Il y a deux cas à étudier, car il y a deux types de déplacements : les translations et les rotations.
- Cas $h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{u}}$: il faut distinguer deux cas :
  - Si $k = 1$ (l'homothétie est alors l'identité), on retrouve la translation $t_{\vec{u}}$.
  - Si $k \neq 1$, $h_{\Omega,k} \circ t_{\vec{u}}$ est une homothétie de même rapport *k*, puisque les équations respectives des transformations sont $z' = z + \lambda$ et $z" = k(z' - \omega) + \omega$, d'où $z" = k(z + \lambda - \omega) + \omega$, ou encore $z" = kz + (k\lambda - k\omega + \omega)$, où ω et λ sont les affixes respectives de Ω et $\vec{u}$.



(*dessin avec k = 0,5*)

  - On peut trouver son centre Ω' par le calcul ou la construction :
    - **Calcul** : L'affixe de son centre est la solution de l'équation $z" = z$ …
    - **Construction** : Puisque la composée est une homothétie, le centre est le point de concours des droites joignant tout point et son image. On remarquera que ce cas (homothétie) est en fait un cas particulier de $h \circ r$: c'est lorsque l'angle de la rotation est nul.

- Cas $h_{J,k} \circ r_{I,\theta}$: Il s'agit de la composée commutative $h_{\Omega,k} \circ r_{\Omega,\theta}$. Il faut trouver Ω.
On peut utiliser pour cela une propriété vue en 1ère sur les <u>points cocycliques et l'égalité des angles</u> :
  - Le segment $[AB]$ a pour image le segment $[A'B']$ par la rotation *r*, et ce dernier a pour image le segment $[A"B"]$ par l'homothétie *h*.
  - On sait que l'angle de la similitude, qui est celui de la rotation, est $\theta = \left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A"B"}\right)$.
  - Les droites (AB) et $(A"B")$ se coupent en *K*.
  On trace alors les cercles circonscrits aux triangles $(KAA")$ et $(KBB")$, qui se coupent en *K* et aussi en un autre point Ω, qui est le point cherché (s'il n'y a pas d'autre point, $\Omega = K$).
  - En effet, l'angle θ vaut $\left(\overrightarrow{KA}\,;\overrightarrow{KA"}\right)$, mais aussi $\left(\overrightarrow{\Omega A}\,;\overrightarrow{\Omega A"}\right)$, puisque les quatre points A, $A"$, Ω et *K* sont cocycliques par construction, et du même côté de la corde $[AA"]$ (*propriété admise*).
  - Pour visualiser le fait que Ω est bien le centre cherché, on a tracé en plus le segment $[A_0'B_0']$, image de $[AB]$ par la rotation $r_{\Omega,\theta}$.
  - On remarque que Ω, $A"$ et A_0' sont bien alignés, puisque $A"$ est l'image de A_0' par l'homothétie $h_{\Omega,k}$. (Idem avec $B"$ et B_0').



($dessin\ avec\ k = 0{,}5\ et\ \theta = \pi/9$)

4) Composées de similitudes directes

- **P32 :** La composée de deux similitudes directes est une similitude directe, donc soit une translation, soit une composée commutative $h \circ r = r \circ h$ d'une homothétie et d'une rotation de même centre. Pour plus de précisions sur la nature et les éléments caractéristiques de la composée, on peut utiliser l'écriture complexe, ou encore les propriétés sur la composée des déplacements vues au début.

VI) Similitudes indirectes

1) Définition et exemples

- **D10** : Une <u>*similitude indirecte*</u> est une similitude qui n'est pas directe.
- **Exemples** : Une réflexion s, la composée $t \circ s$ avec une translation et la composée $h \circ s$ avec une homothétie, sont des similitudes indirectes.

- **T11** : La seule similitude, directe ou indirecte, autre que l'identité, ayant au moins deux points distincts invariants A et B, est la réflexion d'axe (AB).

2) Propriété de base

- **P33** : Soit σ une similitude indirecte. Soit A et B deux points distincts dans le plan. Il existe alors une similitude directe f telle que $\sigma = f \circ s_{(AB)}$ où $s_{(AB)}$ est la réflexion d'axe (AB).

3) Écriture complexe d'une similitude indirecte

- **T12** *(Première partie)*
Soit deux complexes a et b, avec a non nul.
Alors l'application σ du plan dans lui-même qui, au point M d'affixe z, associe M' d'affixe : $z' = a\,\overline{z} + b$ est une similitude indirecte de rapport $|a|$.
- **T13** *(Deuxième partie)*
Soit σ une similitude indirecte qui, au point M d'affixe z, associe M' d'affixe z'.
Alors il existe deux nombres complexes a et b, avec a non nul, tels que : $z' = a\,\overline{z} + b$

- **D11** : L'égalité $z' = a\,\overline{z} + b$ est appelée l'<u>*écriture complexe*</u> de la similitude indirecte σ, dont le rapport est donc $|a|$.

4) Propriétés

- **P34** : Toute similitude indirecte transforme tout angle orienté en son opposé.
- **P35** : En faisant un parallèle entre la composition des similitudes et le signe du produit de deux réels (positif pour directe et négatif pour indirecte), on retiendra, comme la « règle des signes » :
  - La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.
  - La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
  - Et on retrouvera : La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
- **P36 :** La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

- **T14** : Soit les points A, B, A' et B', avec $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors il existe une unique similitude indirecte σ telle que $\sigma(A) = A'$ et $\sigma(B) = B'$.

VII) Triangles semblables

- **D12** : On dit que deux triangles (ABC) et ($A'B'C'$) sont <u>*semblables*</u> lorsqu'il existe une similitude qui transforme les sommets de l'un sur ceux de l'autre. On précise <u>*directement semblables*</u> (respectivement <u>*indirectement semblables*</u> lorsque la similitude est directe (respectivement indirecte).
- **T15** : Soit (ABC) et ($A'B'C'$) deux triangles. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe une similitude telle que : $A' = \sigma(A)$, $B' = \sigma(B)$ et $C' = \sigma(C)$.
2) $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{C'A'}{CA}$
3) $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$, $\widehat{C'B'A'} = \widehat{CBA}$ et $\widehat{A'C'B'} = \widehat{ACB}$
4) $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$ et $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$

- **Remarques préliminaires** :
Pour prouver l'équivalence de plusieurs propositions, on peut utiliser la <u>*transitivité de l'implication*</u> :
$((P \Rightarrow Q)\text{ et }(Q \Rightarrow R))$ est synonyme de $(P \Rightarrow R)$ et le fait que l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est synonyme de la « double implication » : $((P \Rightarrow Q)\text{ et }(Q \Rightarrow P))$
- Ainsi l'équivalence des quatre propositions peut être démontrée par les cinq implications suivantes :

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$$
$$(1) \Leftarrow (2) \Longleftarrow (4)$$