ISOMÉTRIES PLANES & HOMOTHÉTIES

I) Isométries planes

1) Définition D1 : Une *isométrie plane* *f* est une transformation (application bijective) du plan dans lui-même qui conserve les distances, c'est-à-dire :

Pour tous points *A* et *B*, dont les images respectives par *f* sont *A'* et *B'*, alors : $A'B' = AB$

- **Exemples** : Les translations, rotations et réflexions (symétries axiales orthogonales) sont des isométries.

2) Propriétés

- **P1** : La composée de deux isométries est aussi une isométrie.
- **P2** : La réciproque d'une isométrie est une isométrie.
- **P3** : Une isométrie conserve le produit scalaire, c'est-à-dire : pour tous points *A*, *B* et *C*, d'images respectives *A'*, *B'* et *C'* par une isométrie *f*, on a :
$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$
- **P4** : Une isométrie conserve les angles géométriques, c'est-à-dire (points distincts) : $B'A'C' = BAC$
- **P5** : L'image d'une droite est une droite (pas toujours parallèle), l'image d'un segment est un segment de même longueur, l'image d'un cercle est un cercle de centre l'image du centre et de même rayon.
- **P6** : Une isométrie *conserve la parallélisme* et *l'orthogonalité*, c'est-à-dire : les images de deux droites parallèles sont des droites elles-mêmes parallèles, et celles de deux droites perpendiculaires sont des droites elles-mêmes perpendiculaires.
Attention ! cela ne signifie pas que l'image d'une droite est toujours une droite parallèle.

3) Déplacements du plan

- **D2** : On appelle *déplacement* du plan toute *isométrie* (dite *positive*) qui conserve les angles orientés, c'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$.

- **T1** : Les déplacements du plan sont : les translations et les rotations
- **P7** : L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe λ est : $z' = z + \lambda$
- **P8** : L'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe z_0 et d'angle de mesure θ est :
$$z' - z_0 = e^{i\theta}\left(z - z_0\right)$$

- **P9** : La composée de deux déplacements est un déplacement. Plus précisément, la composée :
  - de deux translations est une translation
  - d'une rotation est une translation autre que l'identité est une rotation de même angle
  - de deux rotations d'angles α et β est :
    - une translation si $\alpha + \beta \equiv 0[2\pi]$
    - une rotation d'angle α + β dans les autres cas

4) Antidéplacements du plan

- **D3** : On appelle *antidéplacement* du plan toute *isométrie* (dite *négative*) qui transforme les angles orientés en leur opposé, c'est-à-dire :
$$\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)[2\pi].$$
- **Exemple** : La réflexion est un antidéplacement.
- **P10** : L'écriture complexe de la réflexion d'axe celui des réels est : $z' = \overline{z}$.
- **P11** : La composée de deux réflexions, qui sont des antidéplacements, est un déplacement.
Plus précisément, la composée $s_{(D')} \circ s_{(D)}$ de deux réflexions d'axes respectifs (*D*) et (*D'*) est :
  - une translation si (*D*) et (*D'*) sont parallèles.
  Son vecteur est normal à ces deux droites, et vaut le double de celui qui transforme (*D*) en (*D'*).
  - une rotation si (*D*) et (*D'*) sont sécants en Ω.
  Son centre est Ω, et son angle est le double de l'un des angles $\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)$, où *M* est sur (*D*) et *M'* sur (*D'*), tous deux autres que Ω.

II) Homothétie

1) Définition D4 : Soit Ω un point et *k* un réel non nul.
Une *homothétie* *h*, de centre Ω et de rapport *k*, est définie par : $M' = h(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.

- **Cas particuliers** : Pour *k* = 1, l'homothétie est l'*identité*, ou encore *application identique*, telle que, pour tout point *M*, on a : *M'* = *M*.
Pour *k* = –1, c'est la symétrie de centre Ω.

2) Propriétés

- **P12** : Si les points *M* et *N* ont pour images respectives *M'* et *N'*, alors : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$
- **P13** : Sauf lorsque *k* = 1 ou *k* = –1, l'homothétie ne conserve pas les distances (donc n'est pas une isométrie), mais cependant elle conserve les proportions, propriété caractéristique des similitudes, dont l'étude est l'objet de ce chapitre.
- **P14** : Une homothétie de rapport *k* multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2.
- **P15** : L'homothétie est bijective et $h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,1/k}$.
- **P16 :** La composée de deux homothéties de rapport k_1 et k_2 est :
  - une translation lorsque $k_1 \times k_2 = 1$
  - une homothétie de rapport $k_1 \times k_2$ sinon
- **En particulier** : La composée (commutative) de deux homothéties de même centre est l'homothétie de même centre et de rapport le produit des rapports
$$h_{\Omega,k'} \circ h_{\Omega,k} = h_{\Omega,k} \circ h_{\Omega,k'} = h_{\Omega,k'k}$$

- **P17** : L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe z_0 et de rapport *k* est : $z' - z_0 = k\left(z - z_0\right)$

- **P18** : L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.
- **P19** : L'image du cercle de centre *A* et de rayon *R* est le cercle de centre $h(A)$ et de rayon $|k|R$.