CALCUL INTÉGRAL

I) Aire sous une courbe à l'intégrale

1) Définitions

a) D1 : Étant donnés un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\right)$ du plan et les points *I*, *J* et *K* définis par :

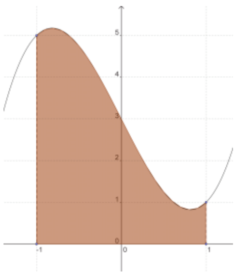
$\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}$, on appelle *unité d'aire* (*u.a.* en abrégé) l'aire du rectangle (*OIKJ*).

- **Conversion** entre *u.a.* et cm² : Si $\|\vec{i}\,\|$ = 4 cm et $\|\vec{j}\,\|$ = 2 cm, alors l'unité d'aire vaut 4 × 2 = 8 cm².
- Si on est dans un repère orthonormé d'unité de longueur 3 cm, alors l'unité d'aire vaut 3² = 9 cm².

b) D2 : Dans ce repère orthogonal, (*C*) étant la courbe d'une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle [*a* ; *b*], on appelle *domaine situé sous la courbe* (*C*) l'ensemble des points *M* du plan de coordonnées (*x* ; *y*) défini par : $a\le x\le b$ et $0\le y\le f(x)$.

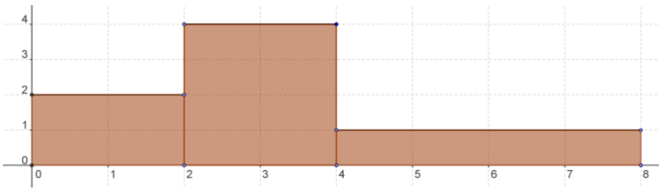
C'est aussi le domaine limité par la courbe (*C*), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

- **Exemple** :
  Domaine défini par :
  $$\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 0\le y\le 2x^3-4x+3\end{cases}$$



c) Calculs d'aire sur deux exemples classiques

E1 : *Fonction en escalier*
Soit *f* définie sur [0 ; 8] par : si *x* ∈ [0 ; 2] , *f*(*x*) = 2, si *x* ∈]2 ; 4] , *f*(*x*) = 4 et si *x* ∈]4 ; 8] , *f*(*x*) = 1.
Sa courbe est tracée dans un repère orthogonal avec 5 cm sur les abscisses et 2 cm sur les ordonnées.

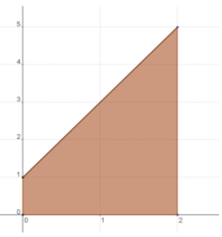


Calculer, en u.a. puis en cm², l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations *x* = 0 et *x* = 8.

E2 : *Fonction affine*
Soit *f* définie sur [0 ; 2] par *f*(*x*) = 2*x* + 1.

Sa courbe est tracée dans un repère orthogonal avec 7 cm sur les abscisses et 3 cm sur les ordonnées.

Calculer l'aire « sous la courbe » de la fonction *f* dans un repère orthonormal, en *u.a.*



d) Calcul avec la « méthode des rectangles »

- *Aire « sous la courbe » d'une fonction continue et positive sur un intervalle I* : Étude du cas où *f* est la fonction définie par $f(x)=x^2$ sur [0 ; 1]. Soit (*C*) sa représentation graphique dans un repère orthonormé. Soit $n\in\mathbf{N}^*$, on partage [0 ; 1] en *n* intervalles de même largeur $[x_0\,;x_1]$, $[x_1\,;x_2]$… $[x_{n-1}\,;x_n]$.

E3 : Compléter, avec les rectangles appropriés, la figure tracée sur la feuille annexe, qui concerne la parabole d'équation $y=x^2$, pour le cas *n* = 10.

On définit alors deux fonctions en escalier g_n et h_n encadrant la fonction *f* sur [0 ; 1].
On appelle alors s_n l'aire « sous la courbe » de g_n et S_n l'aire « sous la courbe » de h_n.

- Cette limite *L* exprime l'aire, **en unités d'aire**, du domaine limité par la courbe de *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives *x* = 0 et *x* = 1.
- On l'appelle *intégrale de f sur l'intervalle* [0 ; 1] et on note $L=\int_0^1 f(x)\,dx$.
- Par un raisonnement analogue, on peut définir ainsi l'intégrale de toute fonction continue, positive et strictement croissante sur un intervalle [*a* ; *b*].
- On admettra qu'il en est de même pour toute fonction continue et positive sur [*a* ; *b*].

2) Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle *I*

- **D3** : Si *f* est une fonction continue et positive sur un intervalle *I* = [*a* ; *b*], (*C*) sa courbe dans un repère orthogonal, *l'intégrale de* a *à* b *de la fonction* f est le réel noté : $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$ égal à l'aire, **en unités d'aire**, du domaine situé sous la courbe (*C*).
- **Commentaires**
  - La notation $\int$ est due à Gottfried Wilhelm Leibniz (philosophe et mathématicien allemand, 1646–1716)
  - La notation $\int_a^b f(x)\,dx$ est due à Joseph Fourier (mathématicien et physicien français, 1768–1830)
  - La « méthode des rectangles » utilise des « sommes de Riemann », du nom du mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826–1866)
  - Le symbole $\int$ rappelle le « S » du mot « somme »
- **Remarques**
  - *a* et *b* sont appelées les *bornes de l'intégrale*.
  - On peut changer le nom de la variable *x* sous le signe d'intégration (*x* est une *variable muette*) :
    $$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt$$
  - Pour tout réel *c* de *I*, $\int_c^c f(x)\,dx=0$

II) Intégrale et primitives

1) Intégrale et primitive pour une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$

- **P1** : Si f est une fonction continue et positive sur $I = [a\ ;\ b]$, alors la fonction φ définie sur $[a\ ;\ b]$ par :

$$\boxed{\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = f(x)$.

La fonction φ est la primitive de *f* qui s'annule en *a*.

- La démonstration sera faite ici dans le cas où f est continue, positive et croissante sur $[a\ ;\ b]$ et elle sera admise dans le cas général.

2) Intégrale d'une fonction continue quelconque

a) Généralisation (*admise*)

- On généralise la propriété précédente à une fonction f continue, de variation et de signe quelconques sur I.

E4 : Déterminer la fonction $F : x \mapsto \int_0^x e^{2t-1}\,dt$ pour tout réel x de $[0\ ;\ 3]$; en déduire $\int_0^2 e^{2t-1}\,dt$.

b) Application au calcul des intégrales

- **P2 :** Si f est une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive quelconque de f sur I alors, pour tous réels a et b de I, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.
- **Remarque** : Cette propriété permet de calculer l'intégrale d'une fonction entre les deux bornes de I dès lors qu'on connaît une primitive de f sur I.
- **Notation** : On écrit pour les calculs d'intégrales :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}.$$

III) Calculs d'intégrales

- Pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$, il « suffit » donc de déterminer une primitive de f sur l'intervalle d'extrémités a et b. Il faut pour cela reconnaître en la fonction f la dérivée d'une fonction connue.
- Les cas les plus fréquents sont les suivants :

Si *f* peut s'écrire :	**Alors une primitive *F* est :**
$u^\alpha \times u'$ avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
Cas particulier : $(ax+b)^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$ et $a \neq 0$	$\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)}$
$\dfrac{u'}{u}$ avec u jamais nulle (*donc de signe constant car continue*)	$\ln\lvert u\rvert$
$e^u \times u'$	e^u
$\sin(u) \times u'$; $\cos(u) \times u'$	$-\cos(u)$; $\sin(u)$
Cas particuliers : $\sin(ax+b)$; $\cos(ax+b)$ avec $a \neq 0$	$-\dfrac{\cos(ax+b)}{a}$; $\dfrac{\sin(ax+b)}{a}$

E5 : Déterminer, après en avoir justifié l'existence, la valeur des intégrales suivantes :

Remarque : *On justifie l'existence d'une intégrale en indiquant que la fonction en présence est continue sur l'intervalle défini par les bornes de l'intégrale.*

	a)	*b*)
1	$\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 3x + 7\right) dx$	$\int_{1}^{-2} (3-2x)^5\,dx$
2	$\int_{-1}^{1} x e^{-x^2}\,dx$	$\int_{1}^{2} \dfrac{4}{(2x-1)^3}\,dx$
3	$\int_{0}^{1} \dfrac{3}{\sqrt{4-2x}}\,dx$	$\int_{0}^{1} \dfrac{3x-3}{\left(x^2-2x+3\right)^2}\,dx$
4	$\int_{2}^{-1} \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$	$\int_{-2}^{1} \dfrac{e^x}{1+e^x}\,dx$

IV) Propriétés de l'intégrale

- **P3** : Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors, pour tous réels a et b de I,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

- **P4 (***Linéarité de l'intégrale***)** : Pour toutes fonctions f et g continues sur un intervalle I contenant les réels a et b, et pour tout réel k, on a :

$$\int_a^b (kf)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

E6 : Soit $I = \int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx$ et $J = \int_0^1 \dfrac{1}{e^x+1}\,dx$.
Calculer $I + J$ puis I. En déduire J.

- **P5** (*Relation de Chasles avec les intégrales*) : Pour toute fonction f continue sur un intervalle I et tous réels a, b et c, on a :

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}.$$

- On interprète géométriquement cette propriété pour une fonction continue et positive sur I, avec $a < c < b$, comme un calcul d'aires « par morceaux ».

E7 : Calculer : $I = \int_0^4 \left(4 - \lvert 3-2x\rvert\right) dx$.

- **P6** (*Signe d'une intégrale*) **:** Si f est une fonction continue sur un intervalle I, avec a et b deux réels de I,

Si… alors	$f \geq 0$ sur I	$f \leq 0$ sur I
$a \leq b$	$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$	$\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$
$a \geq b$	$\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$	$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

E8 : Sans calcul de primitives, déterminer le signe des intégrales suivantes :

$$I = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\,dx \ ; \qquad J = \int_e^1 \ln x\,dx \ ; \qquad K = \int_0^{-2} \frac{dx}{3-x}$$

- **P7** (*Intégrales et ordre*) : Soit f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, et a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

  Si pour tout x de $[a ; b]$,

  $$f(x) \leq g(x)\text{, alors } \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

- **P8** : Si $a \geq b$ et si, pour tout réel x de $[a ; b]$,

  $$f(x) \leq g(x)\text{, alors } \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

- **Attention** à l'ordre des bornes de l'intervalle d'intégration dans la comparaison des intégrales !

E9 : a) Montrer que pour tout $t \in [0;1]$, $\frac{2t}{3} \leq \frac{2t}{2t+1} \leq 2t$.

b) En déduire un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{2t}{2t+1}\,dt$.

c) En transformant l'écriture de la fonction, déterminer la valeur exacte de I.

- **P9** (*Inégalités de la moyenne*) : Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a ; b]$, et si m et M sont deux réels tels que pour tout réel $x \in [a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$,

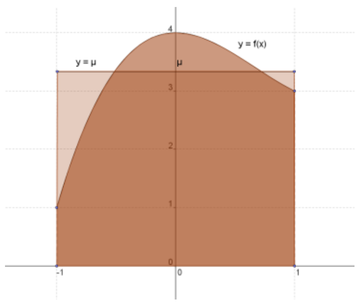
  alors : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

- **D4 : Valeur moyenne d'une fonction continue**
  Si f est une fonction continue sur $I = [a ; b]$, alors la *valeur moyenne* de la fonction f sur I est le réel

  défini par : $\boxed{\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$.

- **P10** (*interprétation géométrique*) :
  μ est la valeur de la fonction constante telle que

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mu\,dx.$$



E10 : Déterminer la valeur moyenne de la fonction exponentielle sur l'intervalle [1 ; 3].

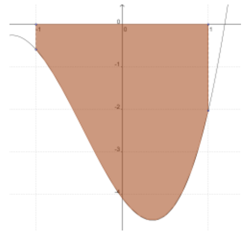
V) Calculs d'aires

- On a vu que si f est une fonction continue, **positive** sur un intervalle I contenant a et b avec $a \leq b$, alors l'aire du domaine D délimité par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations

  $x = a$ et $x = b$ est, **en u.a.**, $A = \int_a^b f(x)\,dx$

E11 : Calculer, en unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par la courbe d'équation $y = \frac{3}{(x-2)^2}$, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

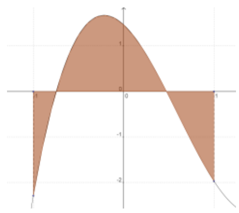
P11 : Si f est une fonction continue, **négative** sur un intervalle I contenant a et b tels que $a \leq b$, alors l'aire du domaine D défini par $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$ est, en unités d'aires : $A = -\int_a^b f(x)\,dx$



- **P12** : **Utilisation de la relation de Chasles avec les intégrales pour une fonction de signe non constant**
  Exemple : Si $c \in [a ; b]$, et si f est positive sur $[a ; c]$ et négative sur $[c ; b]$, alors l'aire du domaine D délimité par la représentation graphique de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est, en unités d'aires :

  $$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

- **Remarque** :
  La propriété est généralisable à une fonction changeant de signe plusieurs fois.



E12 : Calculer, en unités d'aire, l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = 4 - x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.

- **P13** : Soit f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I telles que : pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.
  Si a et b sont deux réels de I tels que $a \leq b$, alors l'aire du domaine D défini par $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$

  est, en unités d'aires : $A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right)dx$

- **P14** : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b tels que $a \leq b$, alors l'aire du domaine D défini par : $a \leq x \leq b$ et y **entre $f(x)$ et $g(x)$** est, en unités d'aires :

  $$\boxed{A = \int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx}$$