ÉLÉMENTS DE LOGIQUE

I) Proposition

a) Définition : Une *proposition* est un énoncé ayant un sens et susceptible d'être *vrai* ou *faux* sans ambiguïté.

b) Exemples :

- « $3 < 2$ » : Faux
- « $4 \geq 4$ » : Vrai
- « 3 divise 12 » : Vrai
- « 91 est un nombre premier » : Faux ($91 = 7 \times 13$)

II) Forme propositionnelle

a) Définition : Une *forme propositionnelle* est un énoncé contenant une (des) variable(s), vrai pour certaines valeurs de la (les) variable(s) et faux pour les autres.

b) Exemples :

- La phrase « $3x + 6 \geq 0$ » est vraie pour tous les réels supérieurs ou égaux à –2, et fausse pour les autres.
- Soit n un entier. On note P_n la *forme propositionnelle* (**f.p.** en abrégé) « n est un multiple de 3 ».
  Par exemple, P_{18} est vraie et P_5 est fausse.
  On dit que 18 *vérifie* P et que 5 ne la vérifie pas.

E1 : Soit la f.p. définie sur les réels par P_x : « $|x| = x$ »

Proposer une valeur de x qui vérifie P, et une qui ne la vérifie pas.

c) Remarques :

- Si on note P_x une f.p. dépendant de la variable x, et si a est une valeur donnée de x, alors P_a est une proposition et P s'appelle une *propriété*.

E2 : Indiquer les propriétés utilisées à l'exercice **E1**.

- Une proposition est donc une forme propositionnelle :
  – soit toujours vraie (c'est alors une *tautologie*),
  – soit toujours fausse (c'est alors une *antilogie*).
- Une proposition à qui, par convention, on attribue la valeur « *vrai* » s'appelle un *axiome*.
- Les définitions et propriétés qui suivent s'appliquent de la même façon aux propositions et aux f.p.

III) Négation d'une proposition *P*

Définition : la *négation de P*, notée *non P* ou encore $\overline{P}$, est vraie lorsque P est fausse, et *non P* est fausse lorsque P est vraie.

E3 : Préciser les négations des f.p. suivantes :

Dans IR, « $3x + 6 \geq 0$ »	
Dans IN, « n est pair »	

IV) Proposition définie sur un ensemble *E*

- Soit n un entier positif. On note P_n la forme propositionnelle « n divise 12 ». On note F l'ensemble des entiers vérifiant P_n. On a donc :
  $F = \{ n \in \mathbf{N}, P_n \} = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 \}$

$\{ n \in \mathbf{N}, P_n \}$ définit F en *compréhension*.
$\{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 \}$ définit F en *extension*.

- On peut définir un sous-ensemble F d'un ensemble E par la donnée d'une proposition P, vraie uniquement pour les éléments de F. On dit que P *caractérise* le sous-ensemble F.
- Par exemple, l'équation $3x + 2y = 5$ caractérise les points d'une droite, dont les coordonnées vérifient cette équation et qui sont les seules à la vérifier.
- Inversement, à tout sous-ensemble F d'un ensemble E donné en extension, on peut associer la f.p. « x appartient à F », et on note « $x \in F$ ».
  On a donc : $F = \{ x \in E, P_x \}$.

E4 : Préciser l'ensemble F caractérisé par la f.p. de **E1**

- Si on note A l'ensemble $\{x, x \in E, P_x \}$, alors l'ensemble $\{ x, x \in E, non\ P_x \}$ est le *complémentaire* de A dans E et se note $C_E A$ ou encore $\overline{A}$, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E.

V) Table de vérité

a) Définition : tableau permettant de visualiser les *valeurs de vérité* (Vrai ou Faux) de plusieurs propositions. On dira que deux propositions sont *synonymes* ou *logiquement équivalentes* lorsqu'elles ont même table de vérité. On notera $P \equiv Q$.

b) P1 : Exemple :

P et *non*(*non P*) sont synonymes :

P	*non P*	*non*(*non P*)
V	F	V
F	V	F

On peut aussi utiliser la notation (qui a l'avantage de ne pas dépendre d'une langue et d'être ainsi internationale) : 1 pour *Vrai* et 0 pour *Faux.*

VI) Connecteurs

a) Définitions : À partir de propositions, le langage usuel construit d'autres propositions plus complexes ; pour cela, il utilise des *connecteurs*.

Intitulé	Nom	Symbole	Ensembles
Disjonction inclusive	« *ou* »	$P \vee Q$	Réunion $A \cup B$
Disjonction exclusive	« *ou bien* » ou encore « *soit..., soit...* »	$P \text{ w } Q$	Différence symétrique $A \,\Delta\, B = A \cup B - A \cap B$
Conjonction	« *et* »	$P \wedge Q$	Intersection $A \cap B$
Implication	« *implique* » ou encore « *si..., alors...* »	$P \Rightarrow Q$ $\overline{P} \vee Q$	$\overline{A} \cup B$, où $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E
Équivalence	« *si et seulement si* »	$P \Leftrightarrow Q$	Complémentaire de $A \,\Delta\, B$

b) Tables de vérité :

P	Q	$P \vee Q$	$P \text{ w } Q$	$P \wedge Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	F	V	V

E5 : Soit P et Q deux propositions. Dresser la table de vérité de la proposition $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

c) Emploi des connecteurs dans le langage courant :

- Le mot « *ou* » n'a pas le même sens dans les deux phrases suivantes :
  – « *qu'il pleuve* **ou** *qu'il vente, ne sortez pas !* »
  – « *je partirai lundi* **ou** *mardi* »
- Le premier « *ou* » est <u>*inclusif*</u> et le deuxième <u>*exclusif*</u>, car lundi ***et*** mardi sont incompatibles (P et Q sont dits <u>*incompatibles*</u> lorsque $P \wedge Q$ est une antilogie). Le langage courant est parfois imprécis quant à la différence d'utilisation de ces deux « *ou* ».
- De même, la conjonction « *et* » a parfois un autre sens que celui du connecteur :
  - « *et* » a le sens de « *puis* » dans « *je jouerai au volley* **et** *je me baignerai* »
  - « *et* » a le sens de « *donc* » dans « *il a mangé trop de chocolat* **et** *il a eu une crise de foie* »
  - « *et* » a bien le sens de « *et* » dans « *pour entrer ici, il faut être majeur* **et** *membre du club* »
  - « *et* » a le sens de « *ou* » dans « *peuvent entrer ici les personnes majeures* **et** *les membres du club* »
- Quant à l'implication, symbolisée par l'expression « *si..., alors...* », elle est source de nombreuses erreurs : si l'on comprend facilement que $P \vee Q$ et $P \wedge Q$ sont des propositions créées à partir d'autres, l'implication est souvent comprise et utilisée (à tort) comme un <u>rapport de cause à effet</u>.
- Cela peut venir du verbe « *implique* » qui, contrairement aux conjonctions « *et* » et « *ou* », semble indiquer une conséquence.

- L'expression « *P implique Q* » fait référence à trois valeurs de vérité : celles de P, celle de Q et celle de $P \Rightarrow Q$. Lorsque l'on fait une erreur, c'est le plus souvent qu'on sous-entend que P est vraie alors que justement, si P est fausse, l'implication est vraie.

- Le fait que « $P \Rightarrow Q$ » soit synonyme de « $(non\ P) \vee Q$ » montre bien qu'il s'agit d'un connecteur comme les autres. On le voit bien dans les phrases suivantes : « *Si tu bouges, alors je tire !* » est bien synonyme de « *Ne bouge pas, ou je tire !* ».

d) Propriétés de « *ou* » et de « *et* » :
Soit P, Q et R trois propositions quelconques.

- **P2** : $P \vee (non\ P)$ tautologie (<u>*principe du tiers-exclu*</u>)
- **P3** : $P \wedge (non\ P)$ antilogie (<u>*pr. de non-contradiction*</u>)
- **P4** : $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (distributivité)
- **P5** : $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ (distributivité)

e) P6 : Les lois de Morgan :

$$non\,(P \vee Q) \equiv (non\ P) \wedge (non\ Q)$$
$$non\,(P \wedge Q) \equiv (non\ P) \vee (non\ Q)$$

E6 : Démontrer la loi de Morgan : $\left(\overline{P \vee Q}\right) \equiv \left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right)$

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

- Ces deux lois sont les équivalents ensemblistes de :

Si A et B sont deux sous-ensembles de E,
$$C_E(A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B)$$
$$C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$$

- Elles peuvent s'appliquer dans le langage courant :
  – La négation de « *j'achèterai des pommes* **et** *des poires* » est « *je n'achèterai pas de pommes* **ou** *pas de poires* ».
  – La négation de « *j'irai à Paris* **ou** *à Londres* » est « *je n'irai pas à Paris* **et** *pas à Londres* » (cependant on dirait plus correctement « *je n'irai* ***ni*** *à Paris* ***ni*** *à Londres* »).

f) Propriétés de l'implication et de l'équivalence

- **P7** : $(P \Rightarrow Q) \equiv ((non\ P) \vee Q)$
- **P8** : $(P \Leftrightarrow Q) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$
- **P9** : $(P \Rightarrow Q) \equiv ((nonQ) \Rightarrow (nonP))$
- $((nonQ) \Rightarrow (nonP))$ s'appelle la <u>*contraposée*</u> de $P \Rightarrow Q$ et lui est synonyme. Elle est parfois utilisée pour des démonstrations.
- En revanche, $Q \Rightarrow P$ est la <u>*réciproque*</u> de $P \Rightarrow Q$ et ne lui est pas synonyme.
- L'équivalence de deux propositions est très utile dans les démonstrations, en remplaçant une proposition par une proposition équivalente plus facile à démontrer.

E7 : P, Q et R étant trois propositions, montrer, en complétant la table de vérité suivante, que :
A : $((P \vee Q) \Rightarrow R) \equiv ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$: B

P	Q	R	$P \vee Q$	A	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	B

E8 : Déterminer les ensembles suivants :

$A=\{x\in\mathbf{R},\ (x\in\mathbf{N})\Rightarrow(x>1)\}$	
$B=\{x\in\mathbf{R},\ (x\in\mathbf{Z})\Rightarrow(x\in\mathbf{N})\}$	
$C=\{x\in\mathbf{R},\ (x>1)\Rightarrow(x\in\mathbf{N})\}$	
$D=\{x\in\mathbf{R},\ (x\in\mathbf{N})\Rightarrow(x\in\mathbf{Z})\}$	

VII) Quantificateurs

a) Le quantificateur universel $\forall$:

Lorsqu'on veut indiquer qu'un grand nombre d'éléments vérifient une f.p., au lieu d'écrire : « $P(a)$ et $P(b)$ et $P(c)$ et ... », on peut utiliser le <u>*quantificateur universel*</u> « *quel que soit* » (ou « *pour tout* »).
En notant E l'ensemble des valeurs vérifiant la f.p., on a : « $\forall x\in E,\ P(x)$ ».
Le symbole est la lettre A à l'envers, première lettre de « *all* » (« *tout* » en anglais).

b) Le quantificateur existentiel $\exists$:

La négation de la f.p. « $\forall x\in E, P(x)$ » <u>n'est pas</u> « $\forall x\in E$, *non* $P(x)$ », car si une propriété n'est pas vérifiée par toutes les valeurs d'un ensemble, c'est qu'*il existe au moins* une de ces valeurs qui ne la vérifie pas. On peut définir le <u>*quantificateur existentiel*</u> « *il existe au moins* », symbolisé par $\exists$, qui est un E à l'envers, première lettre de « *existe* ». Ainsi, on a :

$$\left(non\left(\forall x\in E,\ P(x)\right)\right)\equiv\left(\exists x\in E,\ non\ P(x)\right)$$

Remarque : Lorsqu'une proposition n'est vérifiée que par un seul élément, on peut utiliser l'expression « *il existe un unique* », symbolisé par $\exists\,!$

c) Propriétés :

- **P10** : $\exists x\in E,\ non\ P(x)\ \equiv\ \{x,\ x\in E,\ P(x)\}\neq E$
- **P11** : $\exists x\in E,\ P(x)\ \equiv\ \{x,\ x\in E,\ P(x)\}\neq\varnothing$
- **P12** : $non\left(\exists x\in E,\ P(x)\right)\equiv\begin{cases}\forall x\in E,\ non\ P(x)\\ \{x,\ x\in E,\ P(x)\}=\varnothing\end{cases}$

d) Utilisation commune des deux quantificateurs :

- Dans une f.p. utilisant à la fois $\forall$ et $\exists$, l'ordre des quantificateurs est très important :
  ($\forall x\in\mathbf{R},\ \exists y\in\mathbf{R},\ x+y=0$) est vrai : $y=-x$
  mais ($\exists x\in\mathbf{R},\ \forall y\in\mathbf{R},\ x+y=0$) est faux !

- En fait, le « $\forall x$ » avant le « $\exists y$ » indique que y dépend de x, alors que « $\exists x$ » avant le « $\forall y$ » indique que le x sera le même pour tous les y, et donc ne dépend pas d'eux.

- En revanche, deux $\forall$, ou deux $\exists$ qui se suivent directement peuvent être mis dans un ordre quelconque : ($\forall x\in\mathbf{R},\ \forall y\in\mathbf{R},\ x^2+y^2\geq 0$) et ($\forall y\in\mathbf{R},\ \forall x\in\mathbf{R},\ x^2+y^2\geq 0$) sont synonymes et on peut même l'écrire :
  ($\forall(x\,;y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R},\ x^2+y^2\geq 0$),
  ou encore ($\forall(x\,;y)\in\mathbf{R}^2,\ x^2+y^2\geq 0$)

E9 : Déterminer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont ou non vérifiées :

$\forall x\in\mathbf{R}, \exists e\in\mathbf{R},\ ex=1$	
$\exists e\in\mathbf{R}, \forall x\in\mathbf{R},\ x+e=x$	
$\forall x\in\mathbf{R},\ \exists n\in\mathbf{Z},\ n\leq x<n+1$	
$\forall n\in\mathbf{Z},\ \exists x\in\mathbf{R},\ n\leq x<n+1$	
$\exists n\in\mathbf{Z}, \forall x\in\mathbf{R},\ n\leq x<n+1$	
$\exists x\in\mathbf{R},\ \forall n\in\mathbf{Z},\ n\leq x<n+1$	

E10 : Montrer que la négation, la conjonction, les deux disjonctions, l'implication et l'équivalence peuvent être exprimées en utilisant uniquement la <u>*barre de Sheffer*</u> , dite NAND, définie par : $P\uparrow Q\equiv \mathrm{non}(P\wedge Q)$

non P	
$P\vee Q$	
P w Q	
$P\wedge Q$	
$P\Rightarrow Q$	
$P\Leftrightarrow Q$	

E11 : a) Montrer que les deux propositions : $\underbrace{(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)}_{(1)}$ et $P\Rightarrow R$ ne sont pas synonymes.
b) Donner un exemple montrant que les deux propositions ne sont pas synonymes.

P	Q	R	$P\Rightarrow Q$	$Q\Rightarrow R$	(1)	