

Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion 21 juin 2019

Exercice 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

1. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ car $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ donc par somme et produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

- b. Pour tout x , $f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Sur $]0; +\infty[$, $x > 0$ donc $x > -x$. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , on a $e^x > e^{-x}$ ce qui entraîne que $e^x - e^{-x} > 0$ et donc que $-\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) < 0$.

Donc $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

- c. f est continue : $f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(1 + 1) = \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2} > 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Il existe donc un réel $x > 0$ tel que $f(x) < 0$; par exemple $f(2) \approx -0,26$.

Pour tout x de $]2; +\infty[$, on a $f(x) < f(2) < 0$ donc f ne s'annule pas sur $]2; +\infty[$.

Sur l'intervalle $[0; 2]$ la fonction est continue car dérivable; comme elle est strictement décroissante sur cet intervalle (question 1.b.) d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0; 2]$ donc une solution unique α dans $]0; +\infty[$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = f(x)$.

Donc f est une fonction paire.

On a vu qu'il existe $\alpha \in]0; +\infty[$ unique tel que $f(\alpha) = 0$.

Or $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Donc $-\alpha \in]-\infty; 0[$ vérifie $f(-\alpha) = 0$.

S'il y avait une autre solution $\beta \neq -\alpha$ dans $]-\infty; 0[$, alors $-\beta$ serait une deuxième solution dans $]0; +\infty[$, ce qui n'est pas possible.

Conclusion : l'équation dans \mathbb{R} , $f(x) = 0$ a exactement deux solutions opposées α et $-\alpha$.

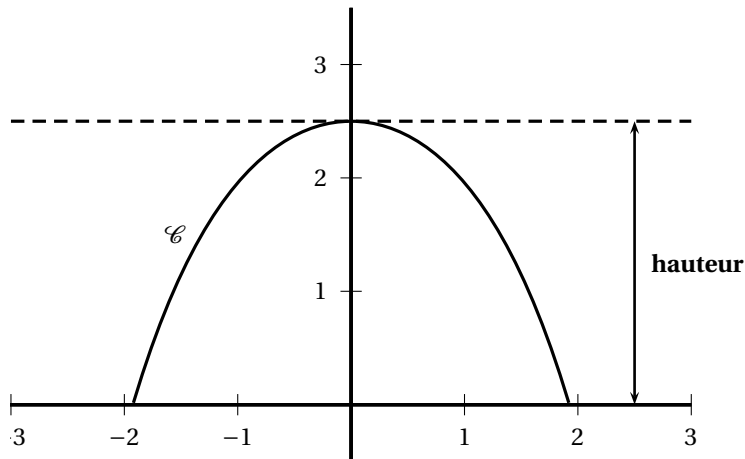
Partie B

Les **serres en forme de tunnel** sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température.

Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction f et le réel α sont définis dans la **partie A**. Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe \mathcal{C} de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha; +\alpha]$.

On a représenté ci-dessous la courbe \mathcal{C} sur l'intervalle $[-\alpha; +\alpha]$.



On admettra que la courbe \mathcal{C} admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

1. La hauteur d'un arceau est $f(0) = \boxed{\frac{5}{2}}$.

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left[-\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]^2 = 1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = 1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]^2$.

b. Alors : $I = \int_0^\alpha \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^\alpha \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) dx = \frac{1}{2}(G(\alpha) - G(0))$ où G est une primitive de $x \mapsto e^x + e^{-x}$.

On a : $G(x) = e^x - e^{-x}$.

Alors : $I = \frac{1}{2}[G(\alpha) - G(0)] = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$

Puisque la fonction f est paire, la courbe \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'axe (Oy) ,

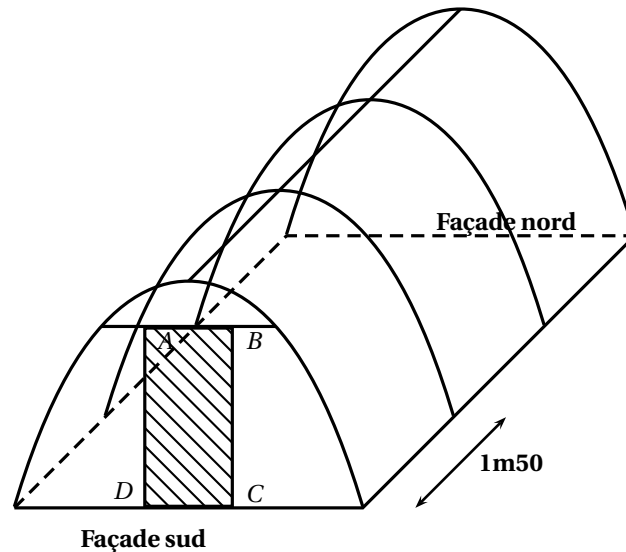
$\boxed{L = 2I = e^\alpha - e^{-\alpha}}$

Partie C

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.

On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle $ABCD$ de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.



On souhaite connaître la quantité, exprimée en m^2 , de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

Cette bâche est constituée de trois parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

1. Les façades Nord et Sud ont chacune une aire égale à $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) \, dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) \, dx$.

L'aire de l'ouverture vaut 2, donc la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m^2 , par :

$$\mathcal{A} = 4 \int_0^{\alpha} f(x) \, dx - 2$$

2. $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Une primitive de f est définie par $F(x) = \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Alors : $\mathcal{A} = 4 \int_0^{\alpha} f(x) \, dx - 2 = 4[F(\alpha) - F(0)] - 2$.

$$F(\alpha) = \frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2}(e^{\alpha} - e^{-\alpha}).$$

$$F(0) = 0$$

$$\mathcal{A} = 14\alpha - 2(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) - 2.$$

L'aire de la bâche latérale est celle d'un rectangle, de longueur $3 \times 1,50 = 4,5$ m et de largeur L , avec $L = 2I$ (voir la partie B).

Cette aire est donc égale à $4,5L = 4,5(e^{\alpha} - e^{-\alpha})$.

L'aire totale de la bâche plastique nécessaire est :

$$14\alpha - 2(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) - 2 + 4,5(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 14\alpha + 2,5(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) - 2 \approx \boxed{42} \text{ m}^2.$$

Exercice 2**5 points****Commun à tous les candidats**

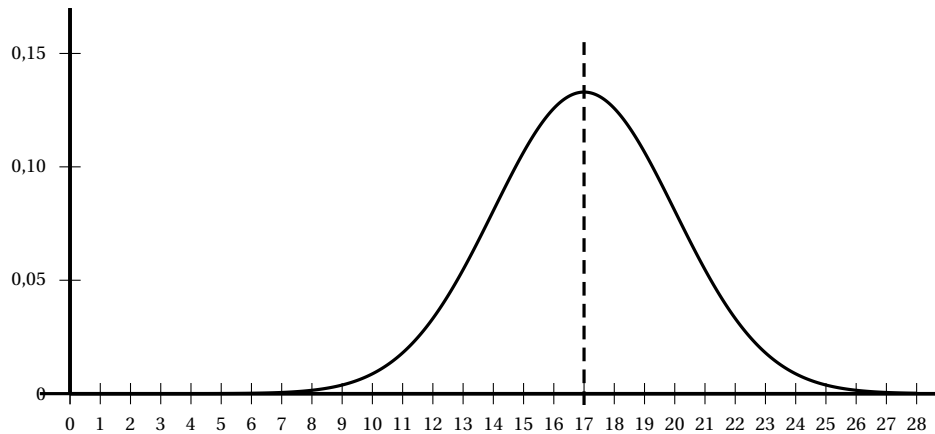
Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B .

Partie A

Les durées des parties de type A et de type B , exprimées en minutes, peuvent être modélisées respectivement par deux variables aléatoires X_A et X_B .

La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9 ; 25]$

La variable aléatoire X_B suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type 3. La représentation graphique de la fonction de densité de cette loi normale et son axe de symétrie sont donnés ci-dessous.



1.
 - a. La durée moyenne d'une partie de type A est $E(X_A) = \frac{9+25}{2} = \boxed{17}$.
 - b. La courbe représentative de la densité correspondant à la loi normale a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 17$, donc la durée moyenne d'une partie de type B est $\mu = 17$ minutes.
2.
 - Avec le jeu de type A , on a : $P(X_A \leq 20) = \frac{20-9}{25-9} = \frac{11}{16} = 0,6875$.
 - Avec le jeu de type B , on a : $P(X_B \leq 20) = P(X_B \leq \mu + \sigma) = P(X_B \leq \mu) + P(\mu \leq X_B \leq \mu + \sigma) = \frac{1}{2} + \frac{0,68}{2} \approx 0,84$ au centième près.

Comme on choisit de manière équiprobable le jeu, la probabilité cherchée est

$$\frac{P(X_A \leq 20) + P(X_B \leq 20)}{2} \approx \boxed{0,76} \text{ au centième près.}$$

Partie B

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

- si le joueur achève une partie de type A , la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8;
- si le joueur achève une partie de type B , la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

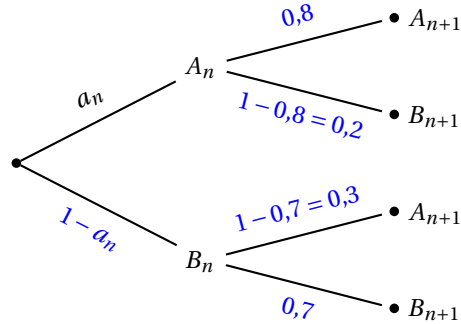
Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :

A_n : « la n -ième partie est une partie de type A. »

B_n : « la n -ième partie est une partie de type B. »

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n .

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre



- b. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_n \cap A_{n+1}) + P_{B_n}(B_n \cap A_{n+1}) = 0,8a_n + 0,3(1 - a_n) = 0,5a_n + 0,3 \text{ donc}$$

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$. La suite (a_n) est donc définie par : $a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

2. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.

- a. Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq a_n \leq 0,6$:

- Initialisation : $a_1 = a = 0,5$ donc $0 \leq a_1 \leq 0,6$
- Hérédité : on suppose $0 \leq a_n \leq 0,6$ pour une valeur quelconque de $n \geq 1$.
Alors : $0 \leq 0,5 \times a_n \leq 0,5 \times 0,6$ donc $0 \leq 0,5a_n \leq 0,3$ d'où, en ajoutant $0,3$:
 $0,3 \leq 0,3 + 0,5a_n \leq 0,6$ et par conséquent : $0 \leq a_{n+1} \leq 0,6$.
La propriété est vraie au rang $n + 1$.

La propriété est vraie au rang 1 et, si elle est vraie à un rang n quelconque elle est vraie au rang suivant $n + 1$: d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

- b. Pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n = -0,5a_n + 0,3$.

Or, d'après la question précédente, on a :

$$0 \leq a_n \leq 0,6 \Rightarrow 0 \leq 0,5a_n \leq 0,3 \Rightarrow -0,3 \leq -0,5a_n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -0,5a_n + 0,3 \leq 0,3 \text{ donc } a_{n+1} - a_n \geq 0.$$

La suite est donc croissante.

- c. La suite est croissante et majorée par $0,6$, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite est convergente vers une limite $\ell \leq 0,6$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5a_n + 0,3) = 0,5\ell + 0,3.$$

Par unicité de la limite, on a : $0,5\ell + 0,3 = \ell$ donc $0,3 = 0,5\ell$ qui donne $\ell = 0,6$.

La suite (a_n) converge vers $0,6$.

3. *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.

- a. Pour tout n , $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5a_n + 0,3 - 0,6 = 0,5a_n - 0,3 = 0,5(a_n - 0,6) = 0,5u_n$ donc

$$u_{n+1} = 0,5u_n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$.

b. Puisque (u_n) est géométrique, $u_n = u_1 q^{n-1} = (a-0,6) \times 0,5^{n-1}$ ($n \geq 1$).

Comme $u_n = a_n - 0,6$, on a : $a_n = u_n + 0,6 = \boxed{a_n = (a-0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6}$.

c. $-1 < 0,5 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ d'où, par produit et par somme, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0,6}$.

Cette limite ne dépend pas de la valeur de a .

d. Sur le long terme, la probabilité que le joueur fasse une partie de type A est 0,6 et donc celle qu'il fasse une partie de type B est 0,4. Le joueur verra plus souvent la publicité insérée dans les jeux de type A.

Exercice 3

4 points

Commun à tous les candidats

1. Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation $(E) : z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

On note A et B les points du plan dont les affixes sont les solutions de (E) .

On note O le point d'affixe 0.

$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 = 12 - 16 = -4 < 0$; l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3} + i.$$

On note A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe $z_2 = \overline{z_1}$.

$$OA = OB = |z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$AB = 2$ (« évident ») donc $OA = OB = AB = 2$; le triangle OAB est équilatéral.

L'affirmation est **vraie**.

2. On note u le nombre complexe : $u = \sqrt{3} + i$ et on note \overline{u} son conjugué.

$$u = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

On remarque que $2019 = 6 \times 336 + 3$ donc $u^{2019} = u^{6 \times 336 + 3} = (u^6)^{336} \times u^3$.

$$u^6 = 2^6 \times e^{i\pi} = -2^6.$$

$$u^{2019} = (-2^6)^{336} \times u^3; \text{ or } u^3 = 2^3 e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i \text{ d'où } \boxed{u^{2019} = 2^{2019}i}.$$

$$\overline{u}^{2019} = \overline{u^{2019}} = \overline{2^{2019}i} = -2^{2019}i.$$

$$\text{Alors : } u^{2019} + \overline{u}^{2019} = \boxed{0}.$$

L'affirmation est **fausse**.

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x e^{-nx+1}.$$

f_n est dérivable :

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'_n(x) = 1 \times e^{-nx+1} + x \times (-n)e^{-nx+1} = (1-nx)e^{-nx+1}$ qui est du signe de $1-nx$ car $e^{-nx+1} > 0$.

$1-nx = 0 \iff x = \frac{1}{n}$ et $1-nx > 0 \iff 0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ car la fonction $x \mapsto -nx+1$ est affine décroissante.

$f'_n(x)$ est donc positive sur $\left[0; \frac{1}{n}\right]$ puis négative pour $x \geq \frac{1}{n}$.

f_n est donc croissante sur $\left(0; \frac{1}{n}\right)$ puis décroissante; elle a donc un maximum, atteint en $x = \frac{1}{n}$.

L'affirmation est **vraie**.

4. On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \cos(x)e^{-x}$.
 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -e^x \leq f(x) \leq e^{-x}$.
 Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$.
 D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 La courbe \mathcal{C} admet une asymptote en $+\infty$. L'affirmation est **vraie**.
5. Soit A un nombre réel strictement positif.
 On considère l'algorithme ci-contre.
 On suppose que la variable I contient la valeur 15 en fin d'exécution de cet algorithme.

$I \leftarrow 0$
Tant que $2^I \leq A$
$I \leftarrow I + 1$
Fin Tant que

Si la variable I contient la valeur 15 en fin d'algorithme, on a $\begin{cases} 2^{14} \leq A \\ 2^{15} > A \end{cases}$ d'où

$$14 \ln(2) \leq \ln(A) \leq 15 \ln(2).$$

L'affirmation est **fausse**.

Exercice 4

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On note \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs.

Dans cet exercice, on étudie l'ensemble S des matrices qui s'écrivent sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a , b , c et d appartiennent à l'ensemble \mathbb{Z} et vérifient : $ad - bc = 1$.

On note I la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$. Or $6 \times (-4) - (-5) \times 5 = -24 + 25 = 1$ donc $A \in S$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ une matrice. $A \in S \iff ad - 6 = 1 \iff ad = 7$.

Le nombre 7 se décompose ainsi : $7 = 7 \times 1 = 1 \times 7 = (-7) \times (-1) = (-1) \times (-7)$.

Les quatre matrices sont donc $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$.

3. a. On résout dans \mathbb{Z} l'équation (E) : $5x - 2y = 1$.

Puisque le couple (1 ; 2) est une solution de cette équation, on a :

$$\begin{array}{rcl} 5x & - & 2y & = & 1 \\ 5 \times 1 & - & 2 \times 2 & = & 1 \end{array}$$

par soustraction $\frac{5(x-1) - 2(y-2) = 0}{5(x-1) - 2(y-2) = 0}$ et donc $5(x-1) = 2(y-2)$

5 divise $2(y-2)$ et est premier avec 2 donc, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $y-2$:
 $y-2 = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$ d'où $y = 2 + 5k$.

On remplace y par $2 + 5k$ dans l'équation ; on obtient : $5(x-1) = 2 \times 5k$ d'où $x-1 = 2k$ qui donne $x = 1 + 2k$.

Réciproquement, les couples $(1 + 2k ; 2 + 5k)$ sont solutions car $5(1 + 2k) - 2(2 + 5k) = 5 + 10k - 4 - 10k = 1$.

L'ensemble des solutions est donc : $\mathcal{S} = \left\{ (1 + 2k ; 2 + 5k)_{k \in \mathbb{Z}} \right\}$

- b.** Une matrice de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ appartient à S si, et seulement si, $5a - 2b = 1$, donc si, et seulement si, $a = 1 + 2k$ et $b = 2 + 5k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ces matrices sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 + 2k & 2 + 5k \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S . On rappelle que a , b , c et d sont des entiers relatifs tels que $ad - bc = 1$.

- 1.** Puisque $A \in S$, $ad - bc = 1 \iff ad + b \times (-c) = 1$; alors, d'après le théorème de Bézout, a et b sont premiers entre eux.

- 2.** Soit B la matrice : $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

a. $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ donc $AB = I$.

On admet que $BA = AB$ donc $BA = I$.

b. $AB = BA = I$ donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

c. $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$: $da - (-c) \times (-b) = ad - bc = 1$ donc $A^{-1} \in S$.

- 3.** Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On en déduit, en multipliant à gauche par B : $B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ puisque $BA = I$.

Alors : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On en déduit $\begin{cases} x = dx' - by' \\ y = -cx' + ay' \end{cases}$.

- b.** On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y' .

D' divise donc x' et y' donc divise $x = dx' - by'$ et $y = -cx' + ay'$; D' divise donc D .

De même : $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ donc D qui divise x et y divise aussi x' et y' et divise alors aussi leur PGCD D' .

D divise D' et D' divise D donc $D = D'$.

- 4.** On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et pour tout entier naturel n : $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$

On a $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S$ car $2 \times 2 - 1 \times 3 = 1$.

Nous sommes donc dans la situation précédente.

On en déduit que $\text{PGCD}(x_{n+1}; y_{n+1}) = \text{PGCD}(x_n; y_n)$.

En cascade, on en déduit que ce PGCD est celui de $x_0 = 2019$ et de $y_0 = 673$.

Or $2019 = 3 \times 673$ donc leur PGCD est 673.

On en déduirait (par récurrence) que, pour tout n , $\text{PGCD}(x_n; y_n) = 673$

Exercice 4

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1, dont la figure est donnée en annexe.

On note I le milieu du segment [EF], J le milieu du segment [EH] et K le point du segment [AD] tel que

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}.$$

On note \mathcal{P} le plan passant par I et parallèle au plan (FHK)..

Partie A

- M est à l'intersection des droites (AE) et (HK) car ces deux droites non parallèles appartiennent au plan (ADH).
- I et J sont les milieux des segments [EF] et [EH] donc d'après le théorème des milieux, les droites (IJ) et (FH) sont parallèles.
 - La droite (FM) est l'intersection des plans (AEF) et (FHK).
 - L'intersection du plan \mathcal{P} et de la face ABFE est donc la droite parallèle à la droite (FM) passant par le point I .

Partie B

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On a donc les coordonnées suivantes : $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On calcule aisément $I \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $J \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $K \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$

On rappelle que \mathcal{P} est le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

- Soit le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- $\vec{FH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\vec{n} \cdot \vec{FH} = 4 \times (-1) + 4 \times 1 + (-3) \times 0 = 0$ donc $\vec{FH} \cdot \vec{n} = 0$; $\vec{n} \perp \vec{FH}$.

- $\vec{FK} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/4 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{n} \cdot \vec{FK} = 4 \times (-1) + 4 \times \frac{1}{4} + (-3) \times (-1) = 0$, donc $\vec{FK} \cdot \vec{n} = 0$; $\vec{n} \perp \vec{FK}$.

\vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHK) donc \vec{n} est un vecteur normal à ce plan.

- b. Une équation cartésienne de ce plan est donc :

$$4(x - x_H) + 4(y - y_H) + (-3)(z - z_H) = 0 \iff 4(x - 0) + 4(y - 1) + (-3)(z - 1) = 0 \iff 4x + 4(y - 1) - 3(z - 1) = 0 \iff \boxed{4x + 4y - 3z - 1 = 0}.$$

- c. \mathcal{P} et (FHK) sont parallèles donc \vec{n} est un vecteur normal commun.

Une équation cartésienne de \mathcal{P} est :

$$4(x - x_1) + 4(y - y_1) + (-3)(z - z_1) = 0 \iff 4\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4(y) + (-3)(z - 1) = 0 \iff$$

$$\boxed{4x + 4y - 3z + 1 = 0}$$

- d. Calculons les coordonnées du point M' , point d'intersection du plan \mathcal{P} et de la droite (AE).

Une représentation paramétrique de (AE) est
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On injecte les coordonnées de x , y et z dans l'équation cartésienne de \mathcal{P} :

$$4 \times 0 + 4 \times 0 - 3t + 1 = 0 \iff t = \frac{1}{3}.$$

Les coordonnées de M' sont donc $\boxed{M' \left(0; 0; \frac{1}{3} \right)}$

2. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan \mathcal{P} .

- a. \vec{n} , vecteur normal au plan \mathcal{P} est donc un vecteur directeur de Δ .

Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$$\Delta \begin{cases} x = 4t' \\ y = 4t' \\ z = 1 - 3t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

- b. Une équation du plan (ABC) est $z = 0$.

En remplaçant les expressions de x , y et z en fonction de t' dans cette équation, on trouve $1 - 3t' = 0 \iff t' = \frac{1}{3}$.

Les coordonnées de L sont donc $\boxed{L \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; 0 \right)}$.

- c. On trace la droite Δ sur la figure donnée en annexe.

- d. • Le point L de Δ n'appartient pas au plan (ABF) mais E appartient à ce plan; les droites Δ et (BF) ne sont donc pas sécantes.

• $\Delta \begin{cases} x = 4t' \\ y = 4t' \\ z = 1 - 3t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$ et (CG) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Pour $t' = \frac{1}{4}$ et $t = \frac{1}{4}$, on obtient le point de coordonnées $\left(1; 1; \frac{1}{4} \right)$ qui est un point de la droite (CG), donc Δ et (CG) sont **sécantes** en ce point.

Annexe à l'exercice 4 (non spé) à rendre avec la copie

