Math93.com

Baccalauréat 2019 - S
Correction Amérique du Nord

Série S Obligatoire

Mai 2019

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Dans cet exercice et sauf mention contraire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}. Une usine fabrique des tubes.

Partie A

Les questions **1.** *et* **2.** *sont indépendantes. On s'intéresse à deux types de tubes, appelés tubes de type 1 et tubes de type 2.*

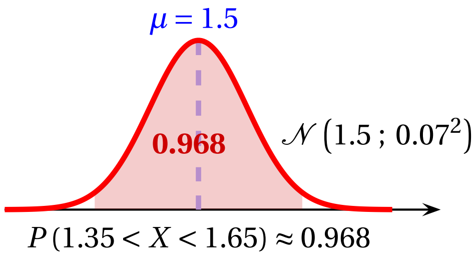
1. *Un tube de type 1 est accepté au contrôle si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètres et 1,65 millimètres.*

1. a. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur exprimée en millimètres. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type 0,07 . On prélève au hasard un tube de type 1 dans la production de la journée. Calculer la probabilité que le tube soit accepté au contrôle.

Le tube 1 est accepté si son épaisseur est comprise entre 1,35 millimètres et 1,65 millimètres donc la probabilité cherchée est celle de l'évènement $(1,35 < X < 1,65)$.

La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 1.5$ et d'écart-type $\sigma = 0.07$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}\left(1.5\,;\,0.07^2\right) \Longrightarrow P(1.35 < X < 1.65) \approx \underline{0,968}$$



Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(1.35\,,\,1.65\,,\,1.5\,,\,0.07) \approx \underline{0,967\,875\,429}$
- *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(1.35\,,\,1.65\,,\,1.5\,,\,0.07)$ *ou (fr.) normalfrép*$(1.35\,,\,1.65\,,\,1.5\,,\,0.07)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(1.35\,,\,1.65,\,0.07\,,\,1.5\,)$

1. b. On note X_1 la variable aléatoire qui, à chaque tube de type 1 prélevé dans la production issue de la machine modifiée, associe son épaisseur. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit une loi normale d'espérance 1,5 et d'écart-type σ_1. Un tube de type 1 est prélevé au hasard dans la production issue de la machine modifiée. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_1 pour que la probabilité que ce tube soit accepté au contrôle soit égale à 0,98. (On pourra utiliser la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X_1 - 1{,}5}{\sigma_1}$ qui suit la loi normale centrée réduite.)

Propriété 1

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma_1^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Z = \dfrac{X_1 - \mu}{\sigma_1}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Donc ici, puisque X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}\left(1.5\,;\,\sigma_1^2\right)$, la v.a. $Z = \dfrac{X_1 - 1.5}{\sigma_1}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
On cherche ici une valeur approchée à 10^{-3} de σ_1 sachant que $P(1{,}35 \leqslant X_1 \leqslant 1{,}65) = 0{,}98$, or :

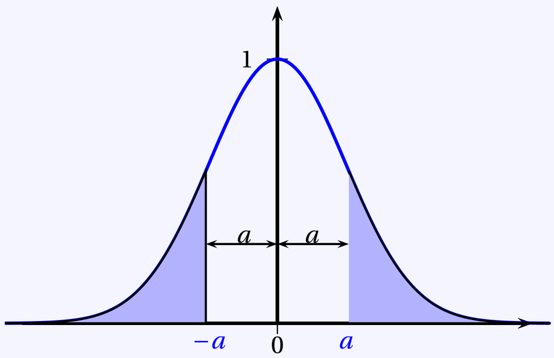
$$\begin{aligned}
P(1{,}35 \leqslant X_1 \leqslant 1{,}65) = 0{,}98 &\iff P\left(\frac{1{,}35 - 1.5}{\sigma_1} \leqslant \frac{X_1 - 1.5}{\sigma_1} \leqslant \frac{1{,}65 - 1.5}{\sigma_1}\right) = 0{,}98 \\
&\iff P\left(\frac{-0{,}15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \frac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = 0{,}98
\end{aligned}$$

Or la v.a. Z suit la loi normale centrée réduite et on rappelle que :

Propriété 2

Soit Z une v.a. qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

- La fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = P(Z \leq t)$.
- Pour tout réel a on a :
  - (1) : $P(Z \leq -a) = P(Z \geq a)$
  - (2) : $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$
  - (3) : $P(-a \leq Z \leq a) = 2\Phi(a) - 1$



De ce fait en appliquant la relation (3) de la propriété 2 :

$$\begin{aligned}
P(1{,}35 \leqslant X_1 \leqslant 1{,}65) = 0{,}98 &\iff P\left(\frac{-0{,}15}{\sigma_1} \leqslant Z \leqslant \frac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = 0{,}98 \\
&\iff 2\Phi\left(\frac{0{,}15}{\sigma_1}\right) - 1 = 0{,}98 \\
&\iff \Phi\left(\frac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = \frac{0{,}98 + 1}{2} = 0{,}99 \\
&\iff P\left(Z \leq \frac{0{,}15}{\sigma_1}\right) = 0{,}99
\end{aligned}$$

La calculatrice nous donne alors avec la fonction répartition normale réciproque :

$$Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1) \Longrightarrow \frac{0{,}15}{\sigma_1} \approx 2{,}326\,347\,874$$

Soit arrondi à 10^{-3} près :

$$\boxed{\sigma_1 \approx 0{,}064}$$

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0{,}99\ ,\ 0\ ,\ 1) \approx \underline{2{,}326347874}$
- *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0{,}99\ ,\ 0\ ,\ 1)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0{,}99\ ,\ 0\ ,\ 1)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0{,}99\ ,\ 1\ ,\ 0)$

2. *Une machine produit des tubes de type 2. Un tube de type 2 est dit « conforme pour la longueur » lorsque celle-ci, en millimètres, appartient a Intervalle* $[298\ ;\ 302]$. *Le cahier des charges établit que, dans la production de tubes de type 2, une proportion de 2 % de tubes non « conformes pour la longueur » est acceptable. On souhaite décider si la machine de production doit être révisée. Pour cela, on prélève au hasard dans la production de tubes de type 2 un échantillon de* 250 *tubes dans lequel 10 tubes se révèlent être non « conformes pour la longueur ».*

2. a. Donner un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des tubes non « conformes pour la longueur » dans un échantillon de 250 tubes.

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 250$ tubes de type 2. Il est constaté que 10 d'entre eux sont non conformes. ». Donc la fréquence observée tubes de type 2 non conformes est
  $$f = 10 \div 250 = 0{,}04 \text{ soit } \underline{f = 0{,}04}$$
  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion de tubes de type 2 non conformes est $\underline{p = 2\%}$ ».
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 250$, $p = 2$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 250 \geq 30 \\ \checkmark & np = 250 \times 0{,}02 = 5 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 250 \times 0{,}98 = 245 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[0{,}02 - 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}02 \times 0{,}98}}{\sqrt{250}}\ ;\ 0{,}02 + 1{,}96\,\frac{\sqrt{0{,}02 \times 0{,}98}}{\sqrt{250}} \right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}00265$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}002}$.
- $p + 1{,}96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}03735$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}038}$.

$$\boxed{I_{250} \approx [0{,}002\ ;\ 0{,}038]}$$

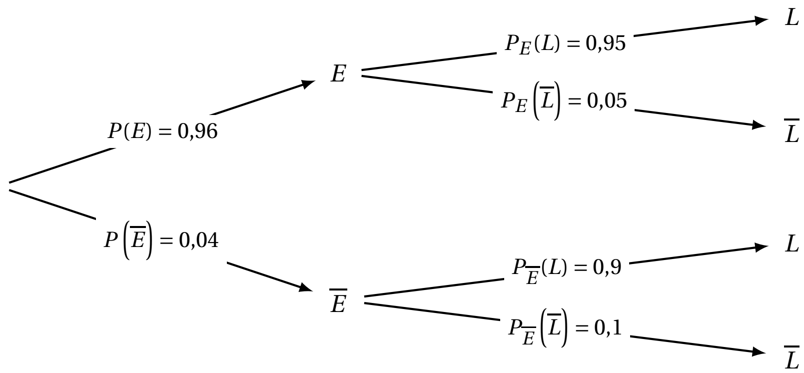
2. b. Décide-t-on de réviser la machine? Justifier la réponse.

La fréquence observée n'appartient pas à l'intervalle, $f = 0{,}04 \notin I$ donc le résultat du contrôle remet en question l'hypothèse, au seuil de 95%.

Partie B

Des erreurs de réglage dans la chaine de production peuvent affecter l'épaisseur ou la longueur des tubes de type 2. Une étude menée sur la production a permis de constater que : 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur conforme ; parmi les tubes de type 2 qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme ; 3,6 % des tubes de type 2 ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme. On choisit un tube de type 2 au hasard dans la production et on considère les événements : E : « l'épaisseur du tube est conforme » ; L : « la longueur du tube est conforme ». On modélise l'expérience aléatoire par un arbre pondéré :

1. **Recopier et compléter entièrement cet arbre.**



- « 96 % des tubes de type 2 ont une épaisseur conforme » donc $p(E) = 0,96$.
- « parmi les tubes de type 2 qui ont une épaisseur conforme, 95 % ont une longueur conforme » donc $p_E(L) = 0,95$.
- « 3,6 % des tubes de type 2 ont une épaisseur non conforme et une longueur conforme. » donc $p\left(L \cap \overline{E}\right) = 0,036$ ce qui nous donne :

$$p_{\overline{E}}(L) = \frac{p\left(L \cap \overline{E}\right)}{p\left(\overline{E}\right)} = \frac{0,036}{0,04} = 0,9$$

2. **Montrer que la probabilité de l'événement *L* est égale à 0,948.**
Les évènements E et $\overline{E}$ formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(L) = P(L \cap E) + P\left(L \cap \overline{E}\right)$$
$$P(L) = P(E) \times P_E(L) + P\left(\overline{E}\right) \times P_{\overline{E}}(L)$$
$$P(L) = 0{,}96 \times 0{,}95 + 0{,}04 \times 0{,}9$$
$$P(L) = 0{,}912 + 0{,}036$$
$$P(L) = \underline{0{,}948}$$

Exercice 2. 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. *Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe. Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

Affirmation 1 (Fausse)

L'équation $z - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z+1)$ a pour solution $Z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

$$\begin{aligned} z - \mathrm{i} = i(z+1) &\iff z - \mathrm{i} = \mathrm{i}z + \mathrm{i} \\ &\iff z - \mathrm{i}z = 2\mathrm{i} \\ &\iff z(1-\mathrm{i}) = 2\mathrm{i} \\ &\iff z = \frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \\ &\iff z = \frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2} \\ &\iff \boxed{z = -1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}} \end{aligned}$$

L'affirmation 1 est donc fausse.

Affirmation 2 (Fausse)

Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$.

Pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\begin{aligned} 2\cos x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= 2 \times \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \\ &= 1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} \\ &\neq 1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} \text{ sauf pour } x = 0 \end{aligned}$$

L'affirmation 2 est donc fausse.

Affirmation 3 (Vraie)

Un point M d'affixe z tel que $|z-\mathrm{i}| = |z+1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Notons A et B les points d'affixes i et -1. On a alors :

$$|z-\mathrm{i}| = |z+1| \iff MA = MB$$

Le point M appartient donc à la médiatrice du segment [AB]. On se place dans un RON et on obtient alors avec $\begin{cases} A(0\,;\,1) \\ B(-1\,;\,;0) \\ M(x\,;\,y) \end{cases}$:

$$\begin{aligned} MA = MB &\iff x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2 \\ &\iff x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 \\ &\iff -2y + 1 = 2x + 1 \\ &\iff \underline{y = -x} \end{aligned}$$

L'affirmation 3 est donc vraie.

Affirmation 4 (Fausse)

L'équation $z^5 + z - \mathrm{i} + 1 = 0$ admet une solution réelle.

Supposons que l'équation admet une solution x réelle. On a alors :

$$x^5 + x - \mathrm{i} + 1 = 0 \iff \underbrace{x^5 + x + 1}_{\in\mathbb{R}} = -\mathrm{i}$$

Cela implique que i est réel ce qui est faux.
L'affirmation 4 est donc fausse.

Exercice 3. 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. **Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.**
La fonction f est définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ avec pour tout réel x de cet intervalle :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

Sur $[0\,;\,+\infty[$, et le dénominateur $(x+1)$ et le numérateur x sont positif donc :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de f	0 $\nearrow$

2. **En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad \ln(x+1) \leqslant x$.**
Sur $[0\,;\,+\infty[$, le minimum de f est 0 donc :

$$\forall x \in [0\,;\,+\infty[\ ,\ \ f(x) \geq 0 \iff x - \ln(x+1) \geq 0 \iff \boxed{\forall x \in [0\,;\,+\infty[\ ,\ \ \ln(x+1) \leqslant x}$$

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. **Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.**

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = f(u_0) = 1 - \ln 2 \\ u_2 = f(u_1) \approx \underline{0{,}039} \end{cases}$$

2.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n)\ :\ u_n \geqslant 0$$

- **Initialisation**
Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$u_0 = 1 \geq 0$$

- **Hérédité**
Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

D'après l'hypothèse de récurrence $u_n \geq 0$ et par composition par la fonction f, qui on l'a montré lors de la question A.1. est positive sur $[0\ ;\ +\infty[$ on a :

$$u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$$

On a alors montré que $u_{n+1} \geqslant 0$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**
On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{u_n \geqslant 0}$$

2. b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 1$.

- Décroissance de (u_n).
Pour tout entier n on a :
$$u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n) \iff u_{n+1} - u_n = -\ln(1+u_n)$$
Or pour tout entier n, d'après la question (B.2.a) u_n est positif et donc puisque la fonction ln est positive ou nulle sur $[1\ ;\ +\infty[$:
$$u_n \geq 0 \Longrightarrow \ln(1+u_n) \geq 0$$
De ce fait pour tout entier n,
$$u_{n+1} - u_n = -\ln(1+u_n) \leq 0$$
Ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.
- Montrons que : $u_n \leqslant 1$.
La suite (u_n) étant décroissante et $u_0 = 1$ on a donc, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leq u_0 = 1$$

2. c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 d'après la question (B.2.a), elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \geq 0$.

3. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $\ell = f(\ell)$, où f est la fonction définie dans la partie A. En déduire la valeur de ℓ.

$$\begin{aligned}
\ell = f(\ell) &\iff \ell = \ell - \ln(\ell+1)\\
&\iff \ln(\ell+1) = 0\\
&\iff \ell + 1 = \mathrm{e}^0 = 1\\
&\iff \underline{\ell = 0}
\end{aligned}$$

4.

4. a. Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.

On peut proposer cet algorithme en Python.

```python
from math import *
def s(p):
    u=1
    n=0
    while u>=10**(-p):
        u=u-log(u+1) # log désigne le logarithme népérien noté ln en maths
        n=n+1
    return n
```

Résultat dans la console

```
> s(15)
=> 6
```

En pseudo code cela donne :

$U \leftarrow 1$
$N \leftarrow 0$
Tant que $U \geqslant 10^{-p}$
  $U \leftarrow U - \ln(1+U)$
  $N \leftarrow N+1$
Fin tant que

4. b. Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}.

Remarque

Les calculatrices TI-82/83/84 et casio renvoyaient un résultat faux, $n = 5$ ou ne renvoyaient jamais de réponse, partant en boucle infinie. La suite devenant stationnaire à partir du rang $n = 5$. Par contre, en codant l'algorithme avec les modules Python on trouve $n = 6$ car la valeur obtenue de u_6 est toujours fausse (on trouve $u_6 \approx 4,94 \times 10^{-17}$) mais est inférieure au seuil choisi. La seule calculatrice qui donnerait la bonne réponse serait la DM42 de swissmicros (ou free42 sur smartphone).
Toutes les explications du problème sur la page www.math93.com/..

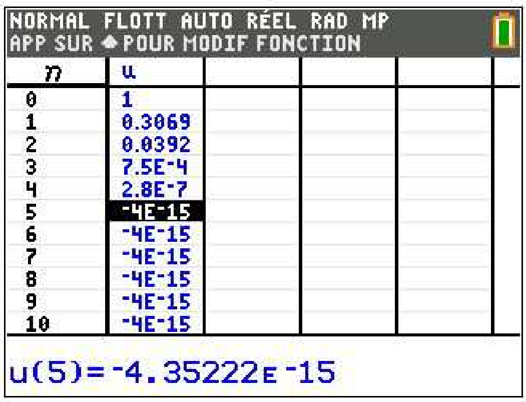
On devrait obtenir :

$$\begin{cases} u_5 \approx 3.95734 \times 10^{-14} \\ u_6 \approx 7,8 \times 10^{-28} \end{cases}$$

Et puisque la suite (u_n) est décroissante,

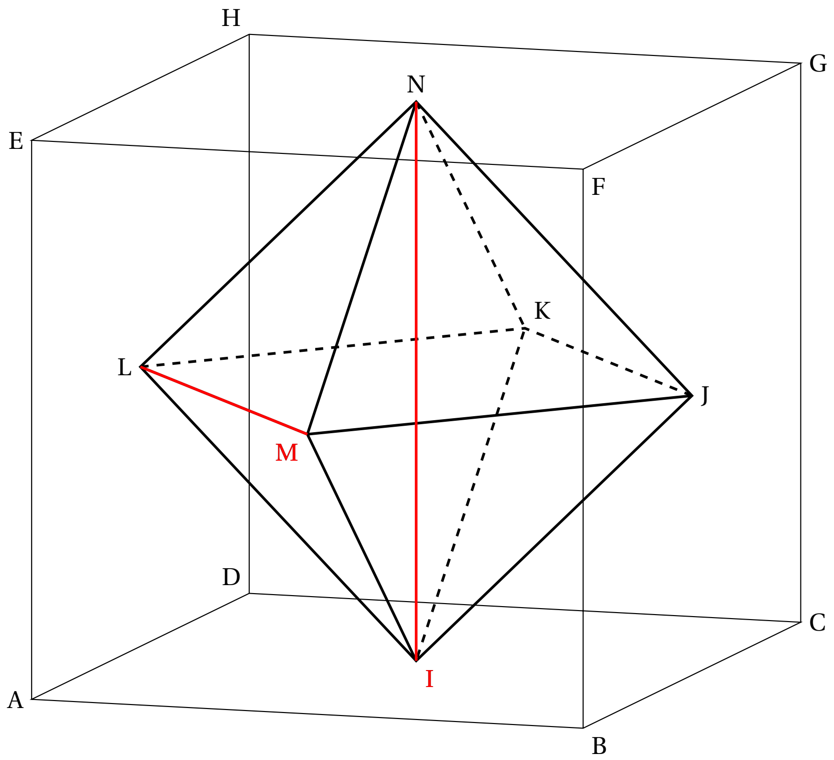
$$\boxed{u_n \leq 10^{-15} \iff n \geq 6}$$

Aucune calculatrice (ou presque) ne permettait d'avoir la valeur approchée de u_6 du fait de leur limitation de calcul. Nul doute que toutes les réponses seront acceptées .



Exercice 4. Obligatoire : Espace 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



On relie les centres de chaque face d'un cube ABCDEFGH pour former un solide IJKLMN comme sur la figure ci-dessous. Plus précisément, les points I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE et EFGH (donc les milieux des diagonales de ces carrés).

1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

- Les plans (ABC) et (KLM) sont parallèles. En effet (KM) et (JL) deux droites sécantes du plan (KLM) sont parallèles respectivement à (BC) et (AB), deux droites sécantes du plan (ABC).
- Les droites (IN) et (AE) sont parallèles. (Elles sont toutes les deux parallèles à la droite (BF) par exemple).
- Or la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABC) puisque le solide est un cube et donc au plan parallèle (KLM).
- La droite (IN) est parallèle à la droite (AE) qui est perpendiculaire au plan (KLM). De ce fait, elle est perpendiculaire au plan (KLM).

$$\begin{cases} (IN)//(AE) \\ (AE) \perp (KLM) \end{cases} \Longrightarrow (IN) \perp (KLM)$$

La droite (IN) est donc orthogonale à toutes les droites du plan (KLM), et donc à la droite (ML).

Dans la suite, on considère le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.

2.

2. a. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$.

$$\begin{cases} N(0,5\,;\,0,5\,;\,1) \\ C(1\,;\,1\,;\,0) \\ M(0,5\,;\,0\,;\,0,5) \\ L(0\,;\,0,5\,;\,0,5) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{NC}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}}$$

2. b. En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

$$\overrightarrow{NC}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\-1\end{pmatrix} . \overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0\end{pmatrix} = -0,25+0,25+0=0$$

Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{\text{NC}}$ et $\overrightarrow{\text{ML}}$ sont orthogonaux et <u>les droites (NC) et (ML) sont orthogonales</u>.

2. c. Déduire des questions précédentes une équation cartésienne du plan (NCI).

D'après les questions (1.) et (2.a.), le vecteur $\overrightarrow{\text{ML}}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{NC}}$ et $\overrightarrow{\text{IN}}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (NCI). Le vecteur $\overrightarrow{\text{ML}}$ est donc un vecteur normal au plan (NCI).

Propriété 3

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{u} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix} . \overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a(x-x_A)+b\left(y-y_A\right)+c(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 3 avec $C(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$:

$$Q(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (NCI) \Longleftrightarrow \overrightarrow{QC}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-0\end{pmatrix} . \overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$Q(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (NCI) \Longleftrightarrow -0,5x+0,5+0,5y-0,5=0$$

$$Q(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (NCI) \Longleftrightarrow -0,5x+0,5y=0$$

$$\boxed{(NCI)\ :\ -x+y=0}$$

3.

3. a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x-y+z=1$.

Les coordonnées des points N(0,5 ; 0,5 ; 1), J(1 ; 0,5 ; 0,5) et M(0,5 ; 0 ; 0,5) vérifient l'équation $x-y+z=1$ donc une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x-y+z=1$.

3. b. La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ? Justifier.

- Une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x-y+z=1$ donc un vecteur normal de ce plan est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.
- Par ailleurs :

$$\begin{cases}D(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\\F(1\ ;\ 0\ ;\ 1)\end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

- Donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires et la droite (DF) est perpendiculaire au plan (NIM).

3. c. Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux points de la figure.

$$Q(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (NJM)\cap(NCI) \Longleftrightarrow \begin{cases}x-y+z=1\\-x+y=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}z=1\\x=y\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}x=t\\y=t\\z=1\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

Ce qui nous donne l'équation paramétrique de la droite intersection des plans (NJM) et (NCI) . Les points $E(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $N(0,5\ ;\ 0,5\ ;\ 1)$ appartiennent à cette droite donc l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est <u>la droite (NE)</u>.

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Spécialité 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Deux matrices colonnes $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si* $\begin{cases} x \equiv x' \ [5] \\ y \equiv y' \ [5] \end{cases}$. *Deux matrices carrées d'ordre 2* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ *à coefficients entiers sont dites congrues modulo 5 si et seulement si* $\begin{cases} a \equiv a' \ [5] \\ b \equiv b' \ [5] \\ c \equiv c' \ [5] \\ d \equiv d' \ [5] \end{cases}$.

Alice et Bob veulent s'échanger des messages en utilisant la procédure décrite ci-dessous.

Ils choisissent une matrice M carrée d'ordre 2, à coefficients entiers. Leur message initial est écrit en lettres majuscules sans accent. Chaque lettre de ce message est remplacée par une matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *déduite du tableau ci-contre : x est le chiffre situé en haut de la colonne et y est le chiffre situé à la gauche de la ligne; par exemple, la lettre T d'un message initial correspond à la matrice colonne* $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On calcule une nouvelle matrice $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *en multipliant* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *à gauche par la matrice M :* $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *On calcule r' et t' les restes respectifs des divisions euclidiennes de x' et y' par 5. On utilise le tableau ci-contre pour obtenir la nouvelle lettre correspondant à la matrice colonne* $\begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix}$.

	0	1	2	3	4
0	A	B	C	D	E
1	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O
3	P	Q	R	S	T
4	U	V	X	Y	Z

Remarque : la lettre W est remplacée par les deux lettres accolées V.

1. *Bob et Alice choisissent la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que la lettre « T » du message initial est codée par la lettre « U » puis coder le message « TE ».

- Codage de T.

$$T \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow M\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\ [5] \\ 24\ [5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow U$$

- Codage de E.

$$E \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow M\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} r' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\ [5] \\ 12\ [5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow O$$

- Conclusion : le message TE se code en UO.

1. b. On pose $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$. **Montrer que les matrices PM et I =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **sont congrues modulo 5.**

$$PM = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 6\ [5] & 10\ [5] \\ 10\ [5] & 16\ [5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc les matrices PM et I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

1. c. On considère A, A' deux matrices d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et Z = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, Z' = $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers congrues modulo 5. Montrer alors que les matrices AZ et A'Z' sont congrues modulo 5.

Notons :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$AZ = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \text{ et } A'Z' = \begin{pmatrix} a'x' + b'y' \\ c'x' + d'y' \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{cases} a \equiv a' \ [5] \text{ et } x \equiv x' \ [5] \Longrightarrow ax \equiv a'x' \ [5] \\ b \equiv b' \ [5] \text{ et } y \equiv y' \ [5] \Longrightarrow by \equiv b'y' \ [5] \end{cases} \Longrightarrow ax + by \equiv a'x' + b'y' \ [5]$$

$$\begin{cases} c \equiv c' \ [5] \text{ et } x \equiv x' \ [5] \Longrightarrow cx \equiv c'x' \ [5] \\ d \equiv d' \ [5] \text{ et } y \equiv y' \ [5] \Longrightarrow dy \equiv d'y' \ [5] \end{cases} \Longrightarrow cx + dy \equiv c'x' + d'y' \ [5]$$

Donc les matrices AZ et A'Z' sont congrues modulo 5.

Dans ce qui suit on admet que si A, A' sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et si D, B' sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 alors les matrices produit AB et A'B' sont congrues modulo 5.

1. d. On note X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et Y = $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux matrices colonnes à coefficients entiers. Déduire des questions précédentes que si MX et Y sont congrues modulo 5 alors les matrices X et PY sont congrues modulo 5 ; ce qui permet de « décoder » une lettre chiffrée par la procédure utilisée par Alice et Bob avec la matrice M choisie.

D'après les données et en appliquant le résultat de la question (1.c.) :

$$\begin{cases} P \text{ congrue à } P \text{ modulo } 5 \\ MX \text{ congrue à } Y \text{ modulo } 5 \end{cases} \underset{\text{Question (1.c.)}}{\Longrightarrow} PMX \text{ congrue à } PY \text{ modulo } 5$$

Or on a montré (question 1.b) que PM et I sont congrues modulo 5, de ce fait en appliquant le résultat de la question (1.c.) :

$$\begin{cases} PM \text{ congrue à } I \text{ modulo } 5 \\ X \text{ congrue à } X \text{ modulo } 5 \end{cases} \underset{\text{Question (1.c.)}}{\Longrightarrow} PMX \text{ congrue à } IX = X \text{ modulo } 5$$

Et donc

$$\begin{cases} PMX \text{ congrue à } PY \text{ modulo } 5 \\ PMX \text{ congrue à } X \text{ modulo } 5 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{X \text{ congrue à } PY \text{ modulo } 5}$$

1. e. Décoder alors la lettre « D ».

$$D \Longrightarrow Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow PY = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 9\ [5] \\ 12\ [5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow O$$

Donc la lettre D est décodée en O.

2. *On souhaite déterminer si la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ peut être utilisée pour coder un message.*

2. a. On pose S = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice RS et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5. On a :

$$RS = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 10\ [5] & 10\ [5] \\ 20\ [5] & 20\ [5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc RS et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5.

2. b. On admet qu'un message codé par la matrice R peut être décodé s'il existe une matrice T telle que les matrices TR et I soient congrues modulo 5. Montrer que si c'est le cas alors les matrices TRS et S sont congrues modulo 5 (par la procédure expliquée en question 1. d. pour le codage avec la matrice M).

Remarque

On admet que si A, A' sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 et si D, B' sont deux matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers congrues modulo 5 alors les matrices produit AB et A'B' sont congrues modulo 5.

$$\begin{cases} TR \text{ congrue à } I \text{ modulo } 5 \\ S \text{ congrue à } S \text{ modulo } 5 \end{cases} \underset{\text{Propriété admise}}{\Longrightarrow} TRS \text{ congrue à } SI = S \text{ modulo } 5$$

2. c. En déduire qu'un message codé par la matrice R ne peut être décodé.

- Supposons qu'un message codé par la matrice R peut être décodé, on admet qu'alors les matrices TRS et S sont congrues modulo 5.
- Or on sait que RS et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont congrues modulo 5
- Donc :

$$\begin{cases} RS \text{ congrue à } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ modulo } 5 \\ T \text{ congrue à } T \text{ modulo } 5 \end{cases} \underset{\text{Propriété}}{\Longrightarrow} TRS \text{ congrue à } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ modulo } 5$$

- On arrive donc à la conclusion que :

$$\begin{cases} TRS \text{ congrue à } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ modulo } 5 \\ TRS \text{ congrue à } S \text{ modulo } 5 \end{cases} \Longrightarrow S \text{ congrue à } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ modulo } 5$$

Or S = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ n'est clairement pas congrues modulo 5.
Un message codé par la matrice R ne peut être décodé.

Fin du devoir