Math93.com

Baccalauréat 2019 - S
Correction Nouvelle Calédonie

Série S Obligatoire

Mars 2019

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. 5 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

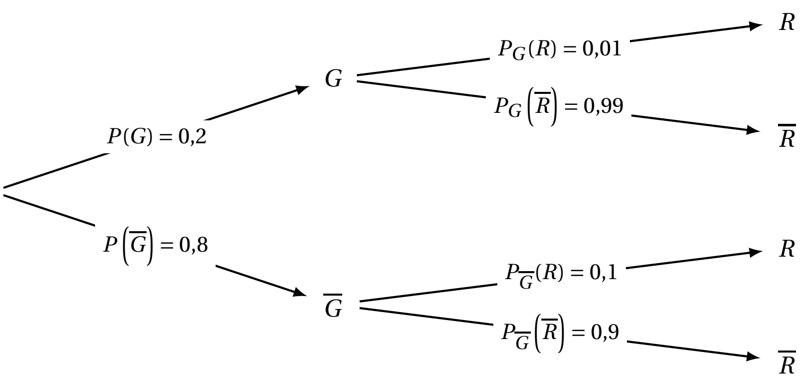
Partie A

Une société de location de voitures s'intéresse à l'état mécanique de son parc automobile afin d'anticiper les frais d'entretien. On dispose des données suivantes : 20 % des voitures sont sous garantie ; pour 1 % des voitures sous garantie, une réparation est nécessaire ; pour 10 % de celles qui ne sont plus sous garantie, une réparation est nécessaire. On choisit une voiture au hasard dans le parc et on considère les évènements suivants : G : « la voiture est sous garantie » ; R : « une réparation est nécessaire ».

1.

1. a. Traduire la situation par un arbre pondéré.

- 20 % des voitures sont sous garantie donc $p(G) = 0,2$;
- pour 1 % des voitures sous garantie, une réparation est nécessaire donc $p_G(R) = 0,01$;
- pour 10 % de celles qui ne sont plus sous garantie, une réparation est nécessaire donc $p_{\overline{G}}(R) = 0,1$.



1. b. Calculer la probabilité que la voiture choisie soit sous garantie et nécessite une réparation.

La probabilité que la voiture choisie soit sous garantie et nécessite une réparation est celle de l'évènement $G \cap R$, sa probabilité est :

$$p(G \cap R) = p(G) \times p_G(R) = 0,2 \times 0,01 = \underline{0,002}$$

1. c. Justifier que $P(R) = 0,082$.

On a de même :

$$p\left(\overline{G}\cap R\right) = p\left(\overline{G}\right)\times p_{\overline{G}}(R) = 0,8\times 0,1 = 0,08$$

D'après la loi des probabilités totales, les évènements G et $\overline{G}$ formant une partition de l'univers :

$$p(R) = p(G\cap R) + p\left(\overline{G}\cap R\right) = 0,002 + 0,08 = \underline{0,082}$$

1. d. Il s'avère que la voiture choisie nécessite une réparation. Quelle est la probabilité qu'elle soit sous garantie ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

La probabilité que la voiture soit sous garantie, sachant que la voiture choisie nécessite une réparation est, au millième près :

$$p_R(G) = \frac{p(G\cap R)}{p(R)} = \frac{0,002}{0,082} \approx \underline{0,002}$$

2. *La société de location fait appel à un garage pour l'entretien de son parc automobile. L'entretien consiste en une révision à laquelle s'ajoutent d'éventuelles réparations. Les conditions commerciales du garage sont les suivantes : si la voiture est encore sous garantie, l'entretien est gratuit; si la voiture n'est plus sous garantie, l'entretien est facturé de la manière suivante : la révision coûte 100 €et, si une réparation est nécessaire, il faut rajouter 400 €.*
Sachant que son parc automobile compte 2 500 voitures, est-il raisonnable pour la société de location de prévoir un budget annuel de 250 000 euros pour l'entretien de l'ensemble des voitures ? On pourra introduire la variable aléatoire X qui représente le coût d'entretien d'une voiture.

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeurs le coût d'entretien d'une voiture.

On va chercher le coût moyen par voiture, soit l'espérance mathématique de X.

On a les évènements :

- G qui correspond à une voiture sous garantie dont la probabilité est $0,2$ et qui nécessite 0 € de dépense ;
- $\overline{G}\cap\overline{R}$ qui correspond à une voiture qui n'est plus sous garantie mais qui ne nécessite pas de réparation, dont la probabilité est $0,8\times 0,9 = 0,72$ et qui nécessite 100 € de dépense ;
- $\overline{G}\cap R$ qui correspond à une voiture qui n'est plus sous garantie mais qui nécessite une réparation, dont la probabilité est $0,08$ et qui nécessite $100 + 400 = 500$ € de dépense.

La loi de probabilité de X est :

Evènement	G	$\overline{G}\cap\overline{R}$	$\overline{G}\cap R$
Coût c_i	0 €	100 €	500 €
Probabilité $p_i = P(X = x_i)$	$0,2$	$0,72$	$0,08$

$$E(X) = \sum c_i \times p_i = 0 + 100\times 0,72 + 500\times 0,08 = 72 + 40 = \underline{112€}$$

Chaque voiture coûte en moyenne 112 € ; il y a 2 500 voitures, ce qui fait une dépense totale de $112\times 2500 = 280000$ €.

Le budget de 250 000 € sera insuffisant.

Partie B

La société de location propose à ses clients deux contrats de location : un contrat de courte durée (inférieure à 2 jours) et un contrat de longue durée (de 3 à 7 jours). La directrice de cette société affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée. Sur les 600 derniers contrats signés l'année précédente, 550 étaient des contrats de courte durée.

1. **En supposant que l'affirmation de la directrice est correcte, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des contrats de courte durée.**

- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 600$, $p = 80$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 600 \geq 30 \\ \checkmark & np = 600 \times 0,8 = 480 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 600 \times 0,2 = 120 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,8 - 1,96\,\frac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{600}}\ ;\ 0,8 + 1,96\,\frac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{600}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,76799$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0,767}$.
- $p + 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,83201$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0,833}$.

$$\boxed{I_{600} \approx [0,767\ ;\ 0,833]}$$

2. **Que peut-on penser de l'affirmation de la directrice ?**
Pour les 600 derniers contrats la fréquence de contrats de courte durée est égale à

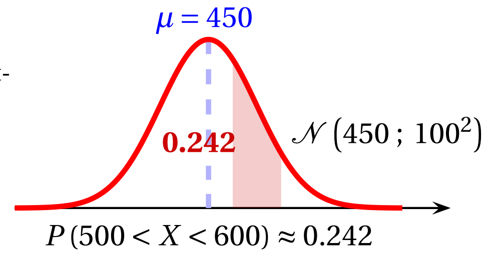
$$f = \frac{550}{600} \approx 0,917 \notin I_{600}$$

donc, au risque de 5 %, l'affirmation de la directrice n'est pas correcte.

Partie C

On modélise le nombre de kilomètres parcourus par les clients louant une voiture pour une semaine par une variable aléatoire Y suivant la loi normale d'espérance $\mu = 450$ et d'écart-type $\sigma = 100$.

1. Quelle est la probabilité que le client louant la voiture pour une semaine roule entre 500 km et 600 km ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.



La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 450$ et d'écart-type $\sigma = 100$. La calculatrice nous donne à 10^{-3} près :

$$X \sim \mathcal{N}\left(450\,;\,100^2\right) \Longrightarrow P(500 < X < 600) \approx \underline{0{,}242}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.normFDR*$(500\,,\,600\,,\,450\,,\,100) \approx \underline{0{,}2417}$
> - *Sur TI82/83+ : normalcdf*$(500\,,\,600\,,\,450\,,\,100)$ *ou (fr.) normalfrép*$(500\,,\,600\,,\,450\,,\,100)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/Ncd* $\Rightarrow$ *NormCD*$(500\,,\,600,\,100\,,\,450\,)$

2. La société de location souhaite faire une offre promotionnelle aux 15 % de ses clients parcourant le moins de kilomètres en une semaine. En-dessous de quel kilométrage hebdomadaire, arrondi à l'unité, un client sera-t-il concerné par cette offre ?

On cherche u tel que $P(X \leq u) = 0{,}15$ où X qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(450\,;\,100^2\right)$. La calculatrice nous donne alors avec la répartition normale réciproque, arrondi à 10^{-0} près :

$$\boxed{P(X \leq u) = 0{,}15 \Longleftrightarrow u \approx \underline{346}}$$

> *Calculatrices*
>
> - *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0.15\,,\,450\,,\,100) \approx \underline{346{,}356661}$
> - *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0.15\,,\,450\,,\,100)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0.15\,,\,450\,,\,100)$
> - *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN* $\Rightarrow$ *InvNormCD*$(0.15\,,\,100\,,\,450)$

En-dessous de 346 km hebdomadaire, un client sera concerné par cette offre.

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 2. 6 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2$.

1. **Déterminer la limite de g en $+\infty$.**
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-4} = +\infty$, donc par produit de limites et somme :
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

2. **Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.**
On a pour x réel :
$$g(x) = x\mathrm{e}^{x-4} + 2\mathrm{e}^{x-4} - 2 = x\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-4} + 2\mathrm{e}^{x-4} - 2$$
Or par théorème :

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- (1) limites usuelles :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0 \end{cases}$$
- (2) croissances comparées :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0 \end{cases}$$
- (3) (nombre dérivé en 0) :
$$\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x} = 1$$

Donc :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-4}x\mathrm{e}^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x-4} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -2}$$

3. **On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g.**
On a pour x réel :
$$g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x-4} + (x+2) \times 1 \times \mathrm{e}^{x-4} = \mathrm{e}^{x-4}(1+x+2) = \mathrm{e}^{x-4}(x+3)$$
On sait que quel soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x-4} > 0$; le signe de $g'(x)$ dépend donc de celui de $(x+3)$ qui s'annule pour $x = -3$ est positif pour $x > -3$ et négatif pour $x < -3$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	-2	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-7} - 2 \approx -2.001$	$\nearrow$	$+\infty$

$$g(-3) = (-3+2)\mathrm{e}^{-3-4} - 2 = -\mathrm{e}^{-7} - 2 \approx -2{,}001$$

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		α		$+\infty$
Variations de g	-2	$\searrow$	$-e^{-7}-2 \approx -2.001$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Sur l'intervalle $]-\infty; -3]$ le maximum de f est (-2) donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

- Application du corollaire sur $[-3; +\infty[$:
  - La fonction g est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[-3; +\infty[$;
  - Le réel $k = 0$ est compris entre $g(-3) \approx -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[-3; +\infty[$.

D'après le tableau de variations : sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$, $f(-3) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

La fonction g étant continue sur cet intervalle car dérivable sur ce même intervalle; il existe donc un réel unique α, $\alpha \in]-3\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		-	0	+	

6. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

- Avec un pas de $\Delta = 0.001$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcr} g(3{,}070) & \approx & 0{,}000\,38 > 0 \\ g(3{,}069) & \approx & -0{,}002\,006 < 0 \end{array}\right| , \quad \text{donc } 3{,}070 < \alpha < 3{,}069.$$

Une valeur approchée de α à 0.001 près est donc $\underline{\alpha \approx 3{,}070}$.

Partie B : Étude de la fonction

f *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^2 - x^2 e^{x-4}$.

1. **Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.**

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff x^2 - x^2 e^{x-4} = 0 \\ &\iff x^2\left(1-e^{x-4}\right) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x^2 = 0 \\ 1 - e^{x-4} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ 1 = e^{x-4} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ 0 = x-4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ 4 = x \end{cases} \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : 0 et 4.

2. **On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. On admet par ailleurs que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.**
On admet pour tout réel x, $f'(x) = -x\,g(x)$, produit de deux facteurs.
De la question 5 de la partie A on a le signe du facteur $g(x)$ et le signe du facteur $(-x)$ est trivial donc :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $-x$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $-x\,g(x) = f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$+\infty$	↘	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

Calcul des limites de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x^2 e^{x-4}$.

- On a avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x^2 e^{x-4}$:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{x-4} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

- On a avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\left(1 - e^{x-4}\right)$:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x-4} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} 1 - e^{x-4} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

D'après la question précédente sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ la fonction est croissante puis décroissante : $f(\alpha)$ est donc le maximum de la fonction sur cet intervalle.

On a vu à la question **A. 3.** que α est le réel tel que

$$g(\alpha)=0 \iff (\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-4}-2=0 \iff (\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-4}=2 \iff \mathrm{e}^{\alpha-4}=\frac{2}{\alpha+2}$$

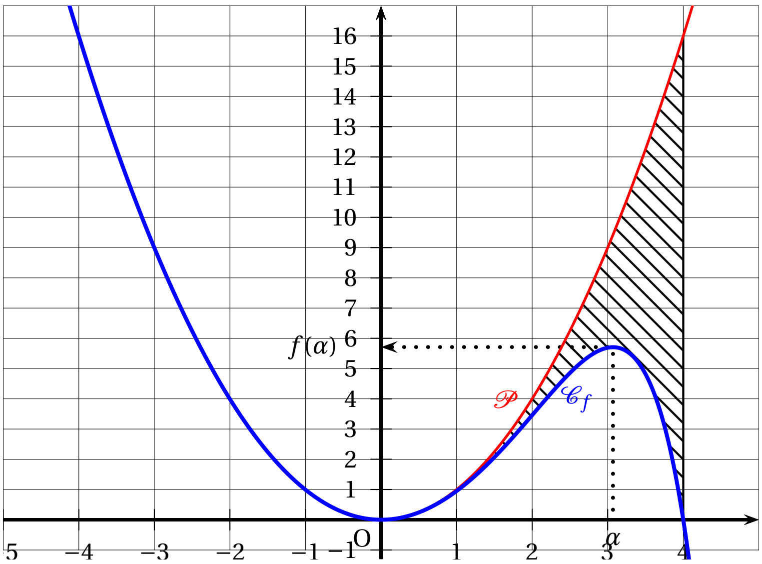
Donc

$$f(\alpha)=\alpha^2\left(1-\mathrm{e}^{\alpha-4}\right)=\alpha^2\left(1-\frac{2}{\alpha+2}\right)=\alpha^2\left(\frac{\alpha+2-2}{\alpha+2}\right)=\alpha^2\times\frac{\alpha}{\alpha+2}$$

Finalement $\boxed{f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}\approx 5{,}71}$

Partie C : Aire d'un domaine

Dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=x^2$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=4$.



1. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{P}$.

Soit $ecart$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$ecart(x)=x^2-f(x)=x^2-\left(x^2-x^2\mathrm{e}^{x-4}\right)=x^2\mathrm{e}^{x-4}$$

Cette fonction produit de deux fonctions positives est positive et ne s'annule que pour $x=0$.

Donc la parabole $\mathscr{P}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$, le seul point commun étant l'origine.

2. On admet qu'une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par : $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^{x-4}$. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en unité d'aire. On donnera la valeur exacte.

On a vu à la question précédente que sur l'intervalle $[0;\,4]$ la courbe $\mathscr{P}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$, donc l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{P}$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=4$, est en unité d'aire égale à l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^4\left[x^2-f(x)\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-F(x)\right]_0^4\\
&=\left[\frac{4^3}{3}-\left(\frac{4^3}{3}-\left(4^2-2\times4+2\right)\mathrm{e}^{4-4}\right)\right]-\left[0-\left(0-2\mathrm{e}^{0-4}\right)\right]\\
\mathscr{A} &= \underline{10-2\mathrm{e}^{-4}\ \text{u.a.}}
\end{aligned}$$

Exercice 3. Vrai/Faux — 4 points

Commun à tous/toutes les candidat/e/s

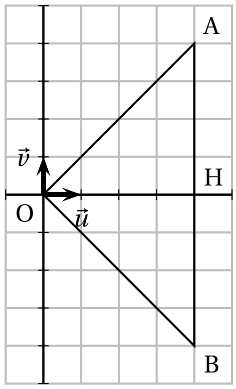
Affirmation 1 (Vraie)

Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z

$$z\left(z^2-8z+32\right)=0.$$

Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

- On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $z\left(z^2-8z+32\right)=0$.
  - $z=0$ ou
  - $z^2-8z+32=0$; $\Delta=(-8)^2-4\times1\times32=-64=-8^2$
    Cette équation a donc deux solutions
    $z_1=\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{8+8\,\mathrm{i}}{2}=4+4\,\mathrm{i}$ et $z_2=4-4\,\mathrm{i}$.



- Soient A et B les points d'affixes respectives z_1 et $z_2=\overline{z_1}$. Ces deux points sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Or O appartient à cet axe donc le triangle OAB est isocèle en O et a pour aire

$$\mathscr{A}=\frac{\text{OH}\times\text{AB}}{2}$$

où H est le milieu de $[\text{AB}]$.

- Le point H a pour affixe $\dfrac{z_1+z_2}{2}=4$ donc OH $=4$.
  AB $=\left|(4+4\,\mathrm{i})-(4-4\,\mathrm{i})\right|=\left|8\,\mathrm{i}\right|=8$; donc

$$\mathscr{A}=\frac{4\times8}{2}=16\text{ u.a.}$$

- Conclusion : l'affirmation 1 est vraie.

Affirmation 2 (Fausse)

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points dont les affixes z vérifient $|z-3|=|z+3|$.

Affirmation 2 : L'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

Soient M, A et B les points d'affixes respectives z, 3 et -3.

$$|z-3|=\text{MA}\quad\text{et}\quad|z+3|=\text{MB}$$

donc

$$|z-3|=|z+3|\iff\text{MA}=\text{MB}$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc une droite, la médiatrice de $[\text{AB}]$.

Conclusion : l'affirmation 2 fausse.

Affirmation 3

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n = \left(1 - \text{i}\sqrt{3}\right)^n.$$

Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.
Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n, les points M_n O et M_{n+3} sont alignés.

On sait que

$$\left(\overrightarrow{\text{OM}_{n+3}}\,,\overrightarrow{\text{OM}_n}\right) = \arg\left(\frac{z_{\text{M}_{n+3}} - z_\text{O}}{z_{\text{M}_n} - z_\text{O}}\right)$$

donc

$$\left(\overrightarrow{\text{OM}_{n+3}}\,,\overrightarrow{\text{OM}_n}\right) = \arg\left(\frac{\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)^{n+3}}{\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)^{n}}\right) = \arg\left(\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)^3\right) = \arg(-8) = \pi \quad [2\pi]$$

On en déduit que les trois points M_n, O et M_{n+3} sont alignés.

<ins>Conclusion</ins> : l'affirmation 3 vraie.

Affirmation 4

On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

$$\sin(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) = 0.$$

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ qui sont : $-\frac{\pi}{4}$; 0 ; $\frac{\pi}{4}$ et π.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \sin(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right) = 0 \\ x \in]-\pi\,;\,\pi] \end{cases}
&\iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ 2\cos^2(x) - 1 = 0 \\ x \in]-\pi\,;\,\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \pi \ , \ x \in]-\pi\,;\,\pi] \\ \cos^2(x) = \dfrac{1}{2} \ , \ x \in]-\pi\,;\,\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \pi \ , \ x \in]-\pi\,;\,\pi] \\ \cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \ , \ x \in]-\pi\,;\,\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \pi \ , \ x \in]-\pi\,;\,\pi] \\ x = \dfrac{\pi}{4} \text{ ou } x = -\dfrac{\pi}{4} \text{ ou } x = \dfrac{3\pi}{4} \text{ ou } x = -\dfrac{3\pi}{4} \ , \ x \in]-\pi\,;\,\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

<ins>Conclusion</ins> : l'affirmation 4 fausse puisque l'équation a 6 solutions sur cet intervalle.

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+8}$.

Partie A : Conjectures

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E−05
8	6	3,337 9E−06
9	7	4,172 3E−07
10	8	5,215 4E−08
11	9	6,519 3E−09
12	10	8,149 1E−10

1. La formule à entrer dans la cellule B3 et à copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) est

```
= B2 / (B2 + 8)
```

2. **Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?**
La suite (u_n) semble décroissante.

3. **Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?**
La suite (u_n) semble converger vers 0.

4. On écrit un algorithme calculant u_{30} :

Initialisation	$u \longleftarrow 1$
Traitement	Pour i variant de 1 à 30
	$u \longleftarrow \dfrac{u}{u+8}$
	Fin pour
Sortie	Afficher u

Partie B : Étude générale

1. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$.

- Initialisation : Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1 > 0$; donc la propriété est vraie au rang 0.
- Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, c'est-à-dire que $u_n > 0$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+8}$$

Or par hypothèse de récurrence $u_n > 0$ donc $u_n + 8 > 0$ et de ce fait $\dfrac{u_n}{u_n+8} > 0$.

On a donc démontré que $u_{n+1} > 0$.

- Conclusion : On a vérifié que la propriété était vraie pour $n = 0$. On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout $n \geqslant 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que $u_n > 0$ pour tout n.

2. **Étudier les variations de la suite (u_n).**
Pour tout n :
$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{u_n+8}-u_n=u_n\left(\frac{1}{u_n+8}-1\right)=u_n\left(\frac{1-u_n-8}{u_n+8}\right)=\frac{u_n\left(-u_n-7\right)}{u_n+8}$$
Pour tout n, on a $u_n>0$ donc $u_n+8>0$ et $-u_n-7<0$.
On en déduit que $\dfrac{u_n\left(-u_n-7\right)}{u_n+8}<0$ et donc que $u_{n+1}-u_n<0$.
La suite (u_n) est donc décroissante.

3. **La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.**
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.
Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n=1+\dfrac{7}{u_n}$. On en déduit que $v_n-1=\dfrac{7}{u_n}$ donc que $u_n=\dfrac{7}{v_n-1}$.

1. **Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.**

   - Pour tout entier n on a :
   $$\begin{aligned}v_{n+1}&=1+\frac{7}{u_{n+1}}\\&=1+\frac{7}{\dfrac{u_n}{u_n+8}}\\&=1+\frac{7\left(u_n+8\right)}{u_n}=1+\frac{7u_n}{u_n}+\frac{56}{u_n}\\&=1+7+\frac{56}{\dfrac{7}{v_n-1}}=8+8\left(v_n-1\right)\\&=8+8v_n-8=8v_n\end{aligned}$$
   Donc la suite v est géométrique de raison $q=8$.
   - $v_0=1+\dfrac{7}{u_0}=1+\dfrac{7}{1}=8$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q=8$ et de premier terme $v_0=8$.

2. **Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n=\dfrac{7}{8^{n+1}-1}$.**
On déduit de la question précédente que, pour tout n,
$$v_n=v_0\times q^n=8\times 8^n=8^{n+1}$$
Or $u_n=\dfrac{7}{v_n-1}$, donc, pour tout n, on a
$$u_n=\frac{7}{8^{n+1}-1}$$

3. **Déterminer la limite de la suite (u_n).**
$q = 8 > 1$ donc
$$\lim_{n\to+\infty} 8^{n+1} = +\infty$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7}{8^{n+1}-1} = 0$$
et de ce fait $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. **On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$. Justifier l'existence d'un tel entier n_0 et déterminer sa valeur.**

   - Existence.
   On a montré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$,
   donc à partir d'un certain rang n_0, tous les termes de la suite seront dans l'intervalle $\left]-10^{-18}\,;\,10^{-18}\right[$.
   Comme $u_n > 0$ pour tout n, on peut dire qu'il existe un rang n_0 tel que, pour $n > n_0$, on ait $u_n < 10^{-18}$.
   - Valeur.
   On résout l'inéquation $u_n < 10^{-18}$.
$$\begin{aligned}
u_n < 10^{-18} &\iff \frac{7}{8^{n+1}-1} < 10^{-18}\\
&\iff 7 < 10^{-18}\left(8^{8n+1}-1\right)\\
&\iff 7\times 10^{18}+1 < 8^{n+1}\\
\\
&\iff \ln\left(7\times 10^{18}+1\right) < \ln\left(8^{n+1}\right)\\
&\iff \ln\left(7\times 10^{18}+1\right) < (n+1)\ln(8)\\
&\iff \frac{\ln\left(7\times 10^{18}+1\right)}{\ln(8)} < n+1\\
&\iff n > \frac{\ln\left(7\times 10^{18}+1\right)}{\ln(8)} - 1
\end{aligned}$$
   Or
$$n > \frac{\ln\left(7\times 10^{18}+1\right)}{\ln(8)} - 1 \approx 19,87$$
   donc c'est à partir de $n_0 = 20$ que $u_n < 10^{-18}$.

Fin du devoir