Math93.com

Baccalauréat 2018 - S
Correction Polynésie

Série S Obli. et Spé.

20 juin 2018

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Probabilités — 5 points

Commun à tous les candidats

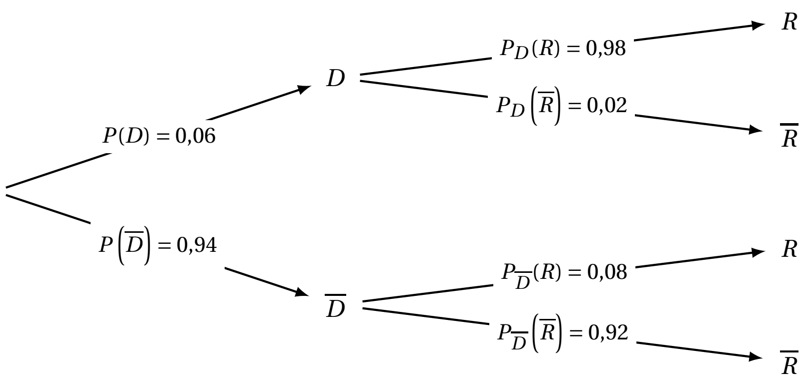
La municipalité d'une grande ville dispose d'un stock de DVD qu'elle propose en location aux usagers des différentes médiathèques de cette ville. Afin de renouveler son offre de location, la municipalité décide de retirer des DVD de son stock. Parmi les DVD retirés, certains sont défectueux, d'autres non. Parmi les 6On admet par ailleurs que parmi les DVD non défectueux, 92autres sont retirés.

Partie A

On choisit un DVD au hasard dans le stock de la municipalité. On considère les événements suivants : D : « le DVD est défectueux » ; R : « le DVD est retiré du stock ». On note D et R les événements contraires respectifs des événements D et R.

1. **Démontrer que la probabilité de l'événement R est 0,134.**

D'après les données on a :



Les évènements D et $\overline{D}$ formant une partition de l'univers, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(R \cap D) + P\left(R \cap \overline{D}\right)$$
$$P(R) = P(D) \times P_D(R) + P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(R)$$
$$P(R) = 0,06 \times 0,98 + 0,94 \times 0,08$$
$$P(R) = 0,0588 + 0,0752$$
$$P(R) = \underline{0,134}$$

2. **Une association caritative contacte la municipalité dans l'objectif de récupérer l'ensemble des DVD qui sont retirés du stock. Un responsable de la ville affirme alors que parmi ces DVD retirés, plus de la moitié est composée de DVD défectueux. Cette affirmation est-elle vraie ?**
On va calculer la probabilité de l'évènement « le DVD est défectueux sachant qu'il a été retiré » soit :

$$\begin{aligned} p_R(D) &= \frac{p(R\cap D)}{p(R)} \\ &= \frac{0,06\times 0,98}{0,134} \\ p_R(D) &\approx \underline{0,44 < 0,5} \end{aligned}$$

Donc l'affirmation est fausse.

Partie B

Une des médiathèques de la ville se demande si le nombre de DVD défectueux qu'elle possède n'est pas anormalement élevé. Pour cela, elle effectue des tests sur un échantillon de 150 DVD de son propre stock qui est suffisamment important pour que cet échantillon soit assimilé à un tirage successif avec remise. Sur cet échantillon, on détecte 14 DVD défectueux. **Peut-on rejeter l'hypothèse selon laquelle, dans cette médiathèque, 6% des DVD sont défectueux ?**

- **Analyse des données** :
  - « Sur un échantillon de $n = 150$ DVD. Il est constaté que 14 d'entre eux sont défectueux. ». Donc la fréquence observée DVD défectueux est
  $$f = 14 \div 150 \approx 0,093333333 \text{ soit } \underline{f \approx 0,093}$$
  - On veut tester l'hypothèse : « la proportion de DVD défectueux est $\underline{p = 6\%}$ ».
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 1 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} ✓ & n \geq 30 \\ ✓ & np \geq 5 \\ ✓ & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 150$, $p = 6\,\%$. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} ✓ & n = 150 \geq 30 \\ ✓ & np = 150\times 0,06 = 9 \geq 5 \\ ✓ & n(1-p) = 150\times 0,94 = 141 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,06 - 1,96\,\frac{\sqrt{0,06\times 0,94}}{\sqrt{150}}\ ;\ 0,06 + 1,96\,\frac{\sqrt{0,06\times 0,94}}{\sqrt{150}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,02199$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0,021}$.
- $p + 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0,09801$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0,099}$.

$$\boxed{I_{150} \approx [0,021\ ;\ 0,099]}$$

- **Conclusion**
La fréquence observée appartient à l'intervalle, $f \approx 0,093 \in I$ donc le résultat du contrôle ne remet pas en question l'hypothèse, au seuil de 95%.

Partie C

Une partie du stock de DVD de la ville est constituée de DVD de films d'animation destinés au jeune public. On choisit un film d'animation au hasard et on note X la variable aléatoire qui donne la durée, en minutes, de ce film. X suit une loi normale d'espérance $\mu = 80$ min et d'écart-type σ. De plus, on estime que $P(X \geq 92) = 0,10$.

1. **Déterminer le réel σ et en donner une valeur approchée à 0,01.**
   On sait que $P(X \geq 92) = 0,10$ donc en passant à l'évènement contraire $P(X \leq 92) = 0,90$.

Propriété 1

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
La variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ si et seulement si, la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

Donc ici, puisque X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(80\,;\,\sigma^2\right)$, la v.a. $Z = \dfrac{X-80}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.
On cherche ici une valeur approchée à 10^{-2} de σ sachant que $P(X \leqslant 92) = 0,9$, or :

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 92) = 0,9 &\Longleftrightarrow P\left(\frac{X-80}{\sigma} \leqslant \frac{92-80}{\sigma}\right) = 0,9 \\ &\Longleftrightarrow P\left(Z \leqslant \frac{12}{\sigma}\right) = 0,9 \end{aligned}$$

Or la v.a. Z suit la loi normale centrée réduite.
La calculatrice nous donne alors avec la fonction répartition normale réciproque :

$$Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1) \Longrightarrow \frac{12}{\sigma} \approx 1,281\,551\,566$$

Une valeur approchée de σ arrondie à 10^{-2} près est donc : $\sigma = \dfrac{12}{1.281551566} \approx \underline{9,36}$.

Calculatrices

- *Sur la TI Voyage 200 : TIStat.invNorm*$(0,9\,,\,0\,,\,1) \approx \underline{1,281\,551\,566}$
- *Sur TI82/83+ : invNorm*$(0,9\,,\,0\,,\,1)$ *ou (fr.) FracNormale*$(0,9\,,\,0\,,\,1)$
- *Sur Casio 35+ ou 75 : Menu STAT/DIST/NORM/InvN ⇒ InvNormCD*$(0,9\,,\,1\,,\,0)$

2. **Un enfant regarde un film d'animation dont il ne connaît pas la durée. Sachant qu'il en a déjà vu une heure et demie, quelle est la probabilité que le film se termine dans les cinq minutes qui suivent ?**
   Sachant qu'il a déjà vu une heure et demie du film (soit 90 min), la probabilité que le film se termine dans les cinq minutes qui suivent (soit après 95 min) est donnée par :

$$P_{X\geqslant 90}(X \leq 95) = \frac{P(90 \leq X \leq 95)}{P(X \geqslant 90)}$$

On utilise alors la propriété suivante afin de calculer $P(X \geqslant 90)$

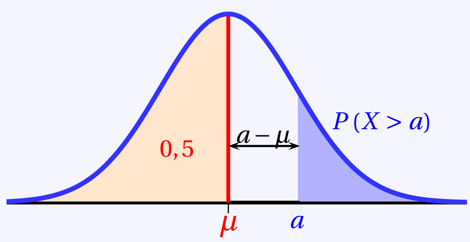
Propriété 2 $(P(X > a)\ ;\ a > \mu)$

Si la variable X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\,\sigma^2\right)$ alors :

$$P\left(X < \mu\right) = 0,5 = P\left(X > \mu\right)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

$$\boxed{P(X > a) = 0,5 - P\left(\mu < X < a\right)}$$



©ISSN 2272-5318

On obtient donc :

$$\begin{aligned} P_{X\geqslant 90}(X\leq 95) &= \frac{P(90\leq X\leq 95)}{P(X\geqslant 90)} \\ &= \frac{P(90\leq X\leq 95)}{0,5-P(80\leq X\leq 90)} \end{aligned}$$

Puis avec la calculatrice, en utilisant le fait que X suit une loi normale de paramètres $\mu = 80$ et $\sigma = 9,36$:

$$\begin{cases} P(90\leq X\leq 95)\approx 0.08815999 \\ 0,5-P(80\leq X\leq 90)\approx 0.1426754539 \end{cases} \Longrightarrow \underline{P_{X\geqslant 90}(X\leq 95)\approx 0,62}$$

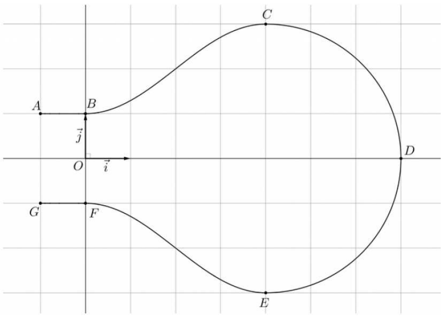
La probabilité que le film se termine dans les cinq minutes qui suivent sachant qu'il en a déjà vu une heure et demie est environ égale à 0,62.

Exercice 2. Fonctions 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A -Modélisation de la forme de l'ampoule

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On considère les points $A(-1\,;\,1)$, $B(0\,;\,1)$, $C(4\,;\,3)$, $D(7\,;\,0)$, $E(4\,;\,-3)$, $F(0\,;\,-$
On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure ci-dessous :



1.

1. a. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f . Pour tout réel x de l'intervalle $[0;4]$, déterminer $f'(x)$.
La fonction f est dérivable sur $[0;4]$, de la forme $a+b\sin u$ donc de dérivée $b\times u'\times\cos u$. Pour tout réel de cet intervalle on a :

$$\boxed{f'(x) = b\times\frac{\pi}{4}\times\cos\left(c+\frac{\pi}{4}x\right)}$$

1. b. On impose que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de la fonction f soient parallèles à l'axe des abscisses. Déterminer la valeur du réel c.
Les tangentes aux points $B(0\,;\,1)$ et $C(4\,;\,3)$ à la représentation graphique de la fonction f sont parallèles à l'axe des abscisses donc leur coefficient directeur est nul soit :

$$f'(0) = 0 \text{ et } f'(4) = 0$$

De ce fait on obtient le système :

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(4)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b\times\dfrac{\pi}{4}\times\cos(c) = 0 \quad \text{et } b\neq 0 \\ \\ b\times\dfrac{\pi}{4}\times\cos(c+\pi) = 0 \quad \text{et } b\neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos c = 0 \quad \text{et } c\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \\ -\cos c = 0 \end{cases} \iff \boxed{c = \frac{\pi}{2}}$$

2. Déterminer les réels *a* et *b*.

Pour tout x de $[0;4]$ on a donc en utilisant $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$:

$$f(x)=a+b\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)=a+b\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

La portion de la courbe située entre les points $B(0\,;\,1)$ et $C(4\,;\,3)$ est modélisée par la fonction f donc :

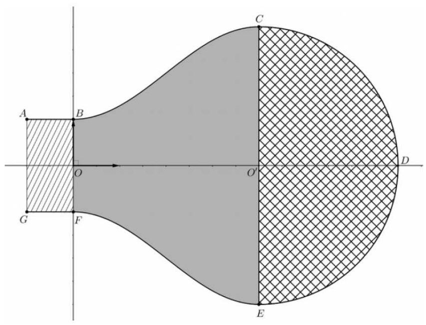
$$\begin{cases}f(0)=1\\ f(4)=3\end{cases}\iff\begin{cases}a+b\cos(0)=1\\ a+b\cos(\pi)=3\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}a+b=1\\ a-b=3\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}a+b=1\\ 2a=4\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}b=-1\\ a=2\end{cases}$$

Donc pour tout réel c de $[0;4]$:

$$\boxed{f(x)=2-\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$$

Partie B - Approximation du volume de l'ampoule

Par rotation de la figure précédente autour de l'axe des abscisses, on obtient un modèle de l'ampoule. Afin d'en calculer le volume, on la décompose en trois parties comme illustré ci-dessous :



Vue dans le plan (BCE)

1. Calculer le volume du cylindre de section le rectangle ABFG.

Le cylindre de section le rectangle ABFG est de rayon $r=OB=1$ (car $B(0\,;\,1)$) et de hauteur $h=AB=1$ (car $A(-1\,;\,1)$, $B(0\,;\,1)$ donc son volume est :

$$V_{ABFG}=\pi\times OB^2\times AB=\pi\times 1^2\times 1=\underline{\pi\ \text{u.v.}}$$

2. Calculer le volume de la demi-sphère de section le demi-disque de diamètre [CE].

La demi-sphère de section le demi-disque de diamètre [CE] est de rayon $\dfrac{CE}{2}=3$ car $C(4\,;\,3)$, $E(4\,;\,-3)$. Donc le volume de la demi-boule est :

$$V_2=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\pi\times 3^3=\underline{18\pi\ \text{u.v.}}$$

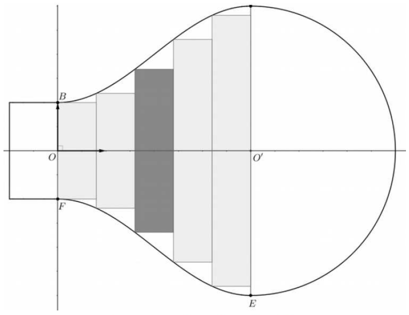
©ISSN 2272-5318

3. Pour approcher le volume du solide de section la zone grisée BCEF, on partage le segment $[OO']$ en n segments de même longueur $\frac{4}{n}$ puis on construit n cylindres de même hauteur $\frac{4}{n}$.

3. a. Cas particulier : dans cette question uniquement on choisit $n = 5$. Calculer le volume du troisième cylindre, grisé dans les figures ci-dessous, puis en donner la valeur arrondie à 10^{-2}.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0; 4]$,

$$f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$



Vue dans le plan (BCE)

On partage le segment $[OO']$ en $n = 5$ segments de même longueur $\frac{4}{n} = \frac{4}{5}$ puis on construit $n = 5$ cylindres de même hauteur $\frac{4}{n} = \frac{4}{5}$. Le premier cylindre est donc de rayon $f(0)$, le deuxième de rayon $f\left(\frac{4}{5}\right)$, le troisième cylindre, grisé dans les figures ci-dessus est donc $r = f\left(2 \times \frac{4}{5}\right)$. Or

$$r = f\left(\frac{8}{5}\right) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{8}{5}\right)$$

Son volume est alors :

$$V_3 = \pi \times f\left(\frac{8}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5} \approx \underline{7,19 \text{ u.v.}}$$

3. b. Cas général : dans cette question, n désigne un entier naturel quelconque non nul. On approche le volume du solide de section BCEF par la somme des volumes des n cylindres ainsi créés en choisissant une valeur de n suffisamment grande. Recopier et compléter l'algorithme suivant de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable V contienne la somme des volumes des n cylindres créés lorsque l'on saisit n.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0; 4]$, $f(x) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Pour k allant de 0 à $(n-1)$, le cylindre n° k (on commence à 0) est de rayon $r = f\left(k \times \frac{4}{n}\right)$ et de hauteur $h = \frac{4}{n}$ donc son volume est :

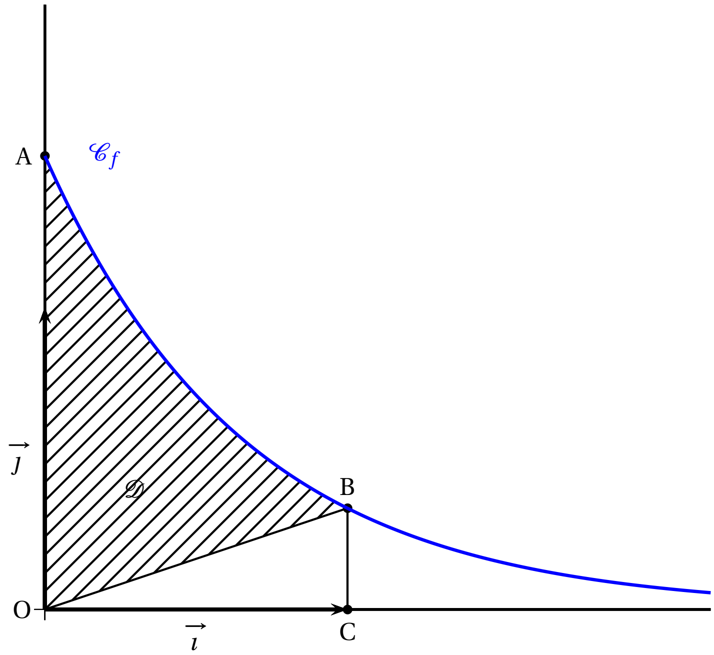
$$V = \pi \times f\left(k \times \frac{4}{n}\right)^2 \times \frac{4}{n}$$

1	$V \leftarrow 0$
1bis	Lire n (puisqu'il faut saisir n)
2	Pour k allant de 0 à $n-1$:
3	$\mid V \leftarrow V + \pi \times \left(2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} \times k \times \frac{4}{n}\right)\right)^2 \times \frac{4}{n}$
4	Fin Pour

Exercice 3. Fonctions et EPI — 4 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-kx}$ où k est un nombre réel strictement positif. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$. On considère le point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 et le point B de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1. Le point C a pour coordonnées (1 ; 0).



1. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-kx}$ où k est un nombre réel strictement positif. Elle est continue sur cet intervalle donc y admet des primitives. Une primitive de f est la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\boxed{F(x) = -\mathrm{e}^{-kx}}$$

En effet, F est de la forme e^{u} donc de dérivée $u'\,\mathrm{e}^{u}$ avec $u(x) = -kx$ donc $u'(x) = -k$ donc pour x de $[0\,;\,+\infty[$:

$$F'(x) = -(-k)\,\mathrm{e}^{-kx} = k\,\mathrm{e}^{-kx} = f(x)$$

2. Exprimer, en fonction de k, l'aire du triangle OCB et celle du domaine $\mathscr{D}$ délimité par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathscr{C}_f$ et le segment [OB].

- Aire du triangle OCB
  Le triangle OCB est rectangle en C avec :

$$\begin{cases} A\left(0\,;\,f(0)\right) \\ B\left(1\,;\,f(1)\right) \\ C(1\,;\,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A(0\,;\,k) \\ B\left(1\,;\,k\,\mathrm{e}^{-k}\right) \\ C(1\,;\,0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} OC = 1 \ \text{ u.l.} \\ BC = k\,\mathrm{e}^{-k} \ \text{ u.l.} \end{cases}$$

  Donc l'aire du triangle OCB est :

$$\boxed{\mathscr{A}_{OCB} = \frac{CO \times CB}{2} = \frac{k\,\mathrm{e}^{-k}}{2} \ \text{ u.a.}}$$

- Aire du domaine $\mathscr{D}$
  La fonction f est continue et positive sur $[0\,;\,+\infty[$ donc l'aire délimité par sa courbe, l'axe des abscisse et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est donnée, en unités d'aire par $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Donc l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est obtenue en effectuant la différence entre $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'aire du triangle OCB soit :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{\mathscr{D}} &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - V_1\\
&= F(1) - F(0) - \frac{k\,\mathrm{e}^{-k}}{2}\\
&= -\mathrm{e}^{-k} - (-1) - \frac{k\,\mathrm{e}^{-k}}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = 1 - \frac{(2+k)\,\mathrm{e}^{-k}}{2}}$$

3. Montrer qu'il existe une unique valeur du réel k strictement positive telle que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ vaut le double de celle du triangle OCB.

L'aire du domaine $\mathscr{D}$ vaut le double de celle du triangle OCB se traduit par :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = 2\times\mathscr{A}_{OCB} &\iff 1 - \frac{(2+k)\,\mathrm{e}^{-k}}{2} = 2\times\frac{k\,\mathrm{e}^{-k}}{2}\\
&\iff 1 - \mathrm{e}^{-k} - \frac{k}{2}\,\mathrm{e}^{-k} = k\,\mathrm{e}^{-k}\\
&\iff 1 - \mathrm{e}^{-k} - \frac{3k}{2}\,\mathrm{e}^{-k} = 0
\end{aligned}$$

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\boxed{g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - \frac{3x}{2}\,\mathrm{e}^{-x}}$$

g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)' - \left(\frac{3x}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\right)'\\
g'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\times(-1) - \left(\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{3x}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\times(-1)\right)\\
g'(x) &= \mathrm{e}^{-x} - \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{3x}{2}\,\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{-1+3x}{2}\,\mathrm{e}^{-x}}$$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction dérivée g' est du signe du facteur $\left(\dfrac{-1+3x}{2}\right)$. Pour tout réel x de $[0\,;\,+\infty[$:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{-1+3x}{2} = 0 \iff x = \dfrac{1}{3}\\[2ex]
\dfrac{-1+3x}{2} < 0 \iff x < \dfrac{1}{3}
\end{array}\right| \Longrightarrow \frac{-1+3x}{2} > 0 \iff x > \frac{1}{3}$$

x	0		$\frac{1}{3}$		α		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0			$+$			
Variations de f	‖ 0	↘	≈ -0.075	↗	0	↗	≈ 0.459	↗	

$$g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - \frac{3x}{2}\,\mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = 0\\
g\left(\dfrac{1}{3}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}} \approx -0{,}075
\end{array}\right.$$

x	0		$\frac{1}{3}$		α		2		$+\infty$
Variations de f	0	$\searrow$	≈ -0.075	$\nearrow$	0	$\nearrow$	≈ 0.459	$\nearrow$	

- Sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{1}{3}\right]$: la fonction g est strictement décroissante et $g(x) < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'y admet pas de solution.
- Sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$: la fonction g est strictement croissante et

$$g(x) \geq g(2) \approx 0,459 > 0$$

  donc l'équation $g(x) = 0$ n'y admet pas de solution.
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3}\,;\,2\right]$:

Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\,;\,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

  - La fonction g est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3}\,;\,2\right]$;
  - Le réel $k = 0$ est compris entre $g\left(\dfrac{1}{3}\right) \approx -0,075$ et $g(2) \approx 0,459$
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
    l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3}\,;\,2\right]$.
- Conclusion : L'équation $g(x) = 0$ possède donc une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Par conséquent il existe une unique valeur du réel k strictement positive telle que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ vaut le double de celle du triangle OCB.

Exercice 4. Obligatoire : Suites 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier. À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape. Soit n un entier naturel. On note a_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ». On note b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ». On note c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ». À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A. Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} & = & \qquad\ \ \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{array}\right.$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?

$$\boxed{= 2 * B2/3 + C2/2 + 2 * D2/3}$$

2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Il semblerait les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers des limites dont des valeurs approchées au millième sont respectivement <u>0,214 et 0,571 et 0,214</u>.

Partie B

1. *On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.*

1. a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - c_{n+1} \\ &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n - \left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n\right) \\ &= \frac{1}{3}a_n - \frac{1}{3}c_n \\ &= \frac{1}{3}(a_n - c_n) \\ u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$.

1. b. Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = a_0 - c_0 = 1 - 0 = 1$. Donc son terme général est, pour tout n entier :

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

2. *On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \dfrac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.*

2. a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{6} v_n$.

- Pour n entier, a_n est la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n »b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n »et c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».
  Or le lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C donc nécessairement les trois évènement forment une partition de l'univers et la somme de leur probabilité fait 1 soit pour tout entier naturel n,
  $$a_n + b_n + c_n = 1$$
- Donc pour n entier : $\begin{cases} v_n = b_n - \dfrac{4}{7} \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ a_n + c_n = 1 - b_n \end{cases}$
  Donc on obtient pour n entier :
  $$\begin{aligned} v_{n+1} &= b_{n+1} - \frac{4}{7} \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n - \frac{4}{7} \\ &= \frac{2}{3}(a_n + c_n) + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7} \\ &= \frac{2}{3}(1 - b_n) + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7} \\ &= \frac{2}{21} - \frac{1}{6}b_n \\ &= \frac{2}{21} - \frac{1}{6}\left(v_n + \frac{4}{7}\right) \\ &= \frac{2}{21} - \frac{1}{6}v_n - \frac{2}{21} \\ v_{n+1} &= -\frac{1}{6}v_n \end{aligned}$$
- Conclusion : la suite (v_n) est géométrique de raison $q_2 = -\dfrac{1}{6}$

2. b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q_2 = -\dfrac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = b_0 - \dfrac{4}{7} = -\dfrac{4}{7}$. Donc son terme général est, pour tout n entier :

$$\boxed{v_n = v_0 \times q_2^n = -\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n}$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$\boldsymbol{a_n=\frac{3}{14}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n,\quad b_n=\frac{4}{7}-\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\quad \text{et}\quad c_n=\frac{3}{14}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.}$$

- Pour n entier d'après les résultats précédents :

$$\begin{cases} v_n=-\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ v_n=b_n-\frac{4}{7}\end{cases} \Longrightarrow \boxed{b_n=\frac{4}{7}-\frac{4}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n}$$

- Par ailleurs, pour n entier :

$$\begin{cases} u_n=a_n-c_n \\ u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ b_n=\frac{4}{7}-\frac{4}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ a_n+b_n+c_n=1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_n-c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ a_n+c_n=1-b_n=1-\left(\frac{4}{7}-\frac{4}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right)\end{cases}$$

Soit pour n entier le système :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a_n-c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ a_n+c_n=\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{cases}
&\Longleftrightarrow \begin{cases} a_n-c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 2\,a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} a_n-c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} c_n=a_n-\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} c_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} c_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n\end{cases}}
\end{aligned}$$

4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes?

Théorème 3

Si le réel q est tel que : $-1<q<1$ on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.

- Pour la suite (a_n).

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n=0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0\end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n=0$$

Et donc

$$\lim\limits_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n}_{a_n}=\frac{3}{14}$$

La suite (a_n) tend vers : $\frac{3}{14}\approx 0{,}214$.

- Pour la suite (b_n).

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} -\frac{4}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0$$

  Et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{4}{7}-\frac{4}{7}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^n}_{b_n} = \frac{4}{7}$$

  La suite (b_n) tend vers : $\dfrac{4}{7} \approx 0,571$.

- Pour la suite (c_n).
  De l'égalité pour n entier, $a_n + b_n + c_n = 1$ on en déduit que la suite (c_n) tend vers : $\dfrac{3}{14} \approx 0,214$.

- Conclusion : après un très grand nombre d'étape, la probabilité que le lapin soit dans la galerie A est de $\dfrac{3}{14}$, dans la galerie B de $\dfrac{4}{7}$ et dans la galerie C de $\dfrac{3}{14}$.

Exercice 4. Spécialité : Suites et matrices 5 points

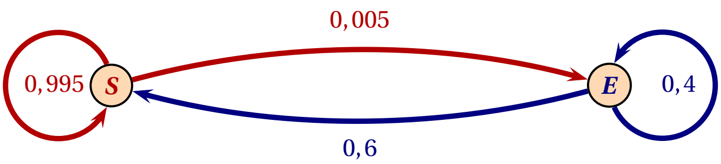
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

Partie A - Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,005$*, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est* $0,6$*. On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable. On note* a_n *la probabilité que l'atome soit dans un état stable et* b_n *la probabilité qu'il se trouve dans un état excité,* n *nanosecondes après le début de l'observation. On a donc* $a_0 = 1$ *et* $b_0 = 0$*. On appelle* X_n *la matrice ligne* $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$*. L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.*

1. **Calculer a_1 puis b_1 et montrer que $a_2 = 0,993\,025$ et $b_2 = 0,006\,975$.**
On va résumer les données dans un arbre probabiliste. On note S l'état stable E l'état excité. La probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,005$, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est $0,6$.



La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1ère ligne : probabilité d'aller de S vers S, de S vers E;
- 2ème ligne : probabilité d'aller de E vers S, de E vers E.

On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}}$$

On note a_n la probabilité que l'atome soit dans un état stable et b_n la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation.

- Calcul de a_1 et b_1.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,995a_0 + 0,6b_0 & 0,005a_0 + 0,4b_0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{cases} a_1 = 0,995 \\ b_1 = 0,005 \end{cases}} \end{aligned}$$

- Calcul de a_2 et b_2.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,995a_1 + 0,6b_1 & 0,005a_1 + 0,4b_1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{cases} a_2 = 0,993025 \\ b_2 = 0,006975 \end{cases}} \end{aligned}$$

2. **Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n A$. A est appelée matrice de transition dans le milieu 1. On admet alors que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 A^n$.**

La matrice de transition du graphe probabiliste est $\begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ donc on a pour tout entier n :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} \iff X_{n+1} = X_n A \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

3. **On définit la matrice P par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$. On admet que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.**

On a :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{121} \underbrace{\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,995 & 0,005 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}} \times \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -0,395 & 0,395 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,395 \end{pmatrix}}$$

4. **Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.** Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n) \, : \, A^n = PD^nP^{-1}$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$A^0 = \text{ Id et } PD^0P^{-1} = P \times Id \times P^{-1} = Id$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.
  On vient de montrer que $D = P^{-1}AP$ donc en composant à gauche par P et à droite par P^{-1} on a :

$$D = P^{-1}AP \iff PDP^{-1} = A$$

  Donc

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= PDP^{-1} \times A^n \end{aligned}$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que : (P_n) soit vérifié et donc que $A^n = PD^nP^{-1}$:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= PD\underbrace{P^{-1} \times P}_{Id}D^nP^{-1} \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

  On a alors montré que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$$

5. **On admet par la suite que, pour tout entier naturel n,**

$$\boldsymbol{A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120+0,395^n & 1-0,395^n \\ 120\,(1-0,395^n) & 1+120\times 0,395^n \end{pmatrix}.}$$

En déduire une expression de a_n en fonction de n.
Pour n entier :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} = X_0 A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120+0,395^n & 1-0,395^n \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{120}{121} + \frac{1}{121}0,395^n}$$

6. **Déterminer la limite de la suite (a_n). Conclure.**

> **Théorème 4**
>
> Si le réel q est tel que : $-1 < q < 1$ on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Ici $-1 < q = 0,395 < 1$ et d'après le théorème 4 on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (0,395)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{121}\times(0,395)^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{121}\times(0,395)^n + \frac{120}{121}\right)}_{a_n} = \frac{120}{121}$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (a_n) :

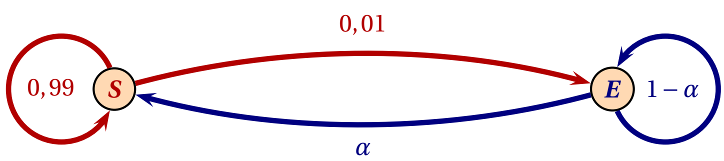
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{120}{121}}$$

Sur le long terme, la probabilité qu'un atome soit dans un état stable est $\dfrac{120}{121} \approx 0,992$.

Partie B - Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,01$.

1. **Donner, en fonction de a, la matrice de transition M dans le milieu 2.**
On va résumer les données dans un arbre probabiliste. On note S l'état stable E l'état excité. La probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,0,01$, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est α.



La matrice de transition M se construit à partir des probabilités suivantes :

- 1ère ligne : probabilité d'aller de S vers S, de S vers E;
- 2ème ligne : probabilité d'aller de E vers S, de E vers E.

On obtient donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}}$$

pour n entier :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 0,99a_n + \alpha b_n \\ b_{n+1} = 0,01a_n + (1-\alpha)b_n \end{cases}$$

2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %. On admet qu'il existe un unique vecteur X, appelé état stationnaire, tel que $XM = X$, et que $X = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$.
Déterminer la valeur de a.

$$\begin{aligned}
XM = X &\iff \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,99 & 0,01 \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0,9702 + 0,02\alpha & 0,0098 + 0,02 - 0,02\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 0,9702 + 0,02\alpha = 0,98 \\ 0,0298 - 0,02\alpha = 0,02 \end{cases} \\
&\iff \boxed{\alpha = \dfrac{0,98 - 0,9702}{0,02} = \underline{0,49}}
\end{aligned}$$

Fin du devoir