Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Amérique du Nord 29 mai 2018 ∾

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,2$.
On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est égale à :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x 0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}\,\mathrm{d}t.$$

Le but de cette partie est de démontrer que $E(X)=5$.

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t)=0,2t\mathrm{e}^{-0,2t}$.
   On définit la fonction G sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $G(t)=(-t-5)\mathrm{e}^{-0,2t}$.
   Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire que la valeur exacte de $E(X)$ est 5.
   Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0,2x}=0.$$

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T.
Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté σ.
Grâce à cette étude, on estime que $P(T<10)=0,067$.

1. Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.
2. Dans cette question, on prend $\sigma=20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

Partie C - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1. La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,2\ \text{min}^{-1}$.
   a. Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.
   b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.
2. L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :
   - parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;

- parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les évènements suivants :
B : « le client paye à une borne automatique » ;
$\overline{B}$: « le client paye à une caisse avec opérateur » ;
S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».
Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.
Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

Partie D - Bons d'achat

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 € d'achats.
Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31 €, le client obtient 12 cartes.
Les cartes gagnantes représentent $0,5$ % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

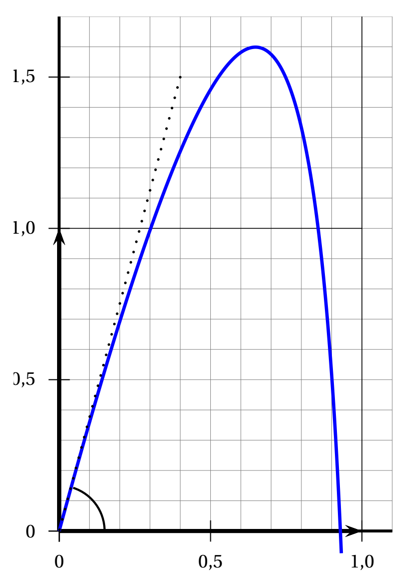
1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?
2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 €, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?

Exercice 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1[$. On note f' sa fonction dérivée.
   On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1[$:

$$f'(x) = \frac{-bx + b - 2}{1 - x}.$$

Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.
L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.
On considère les points B(10 ; −8 ; 2), C(−1 ; −8 ; 5) et D(14 ; 4 ; 8).

1. a. Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).

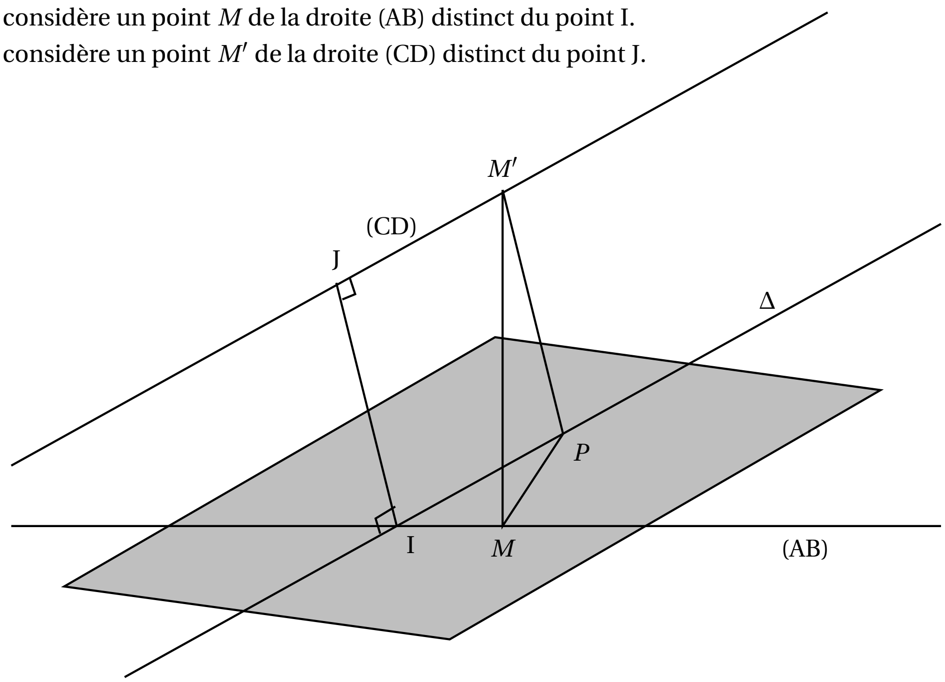
b. Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.

a. Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.

b. Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

3. Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).
Sur le schéma ci -dessous on a représenté les droites (AB) et (CD), les points I et J, et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I.
On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I.
On considère un point M' de la droite (CD) distinct du point J.



a. Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M' coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

b. Démontrer que le triangle MPM' est rectangle en P.

c. Justifier que $MM' > IJ$ et conclure.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les deux graphiques donnés en annexe seront à compléter et à rendre avec la copie

Un scooter radio commandé se déplace en ligne droite à la vitesse constante de 1 m.s^{-1}. Il est poursuivi par un chien qui se déplace à la même vitesse.
On représente la situation vue de dessus dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 mètre. L'origine de ce repère est la position initiale du chien. Le scooter est représenté par un point appartenant à la droite d'équation $x = 5$. Il se déplace sur cette droite dans le sens des ordonnées croissantes.

Dans la suite de l'exercice, on étudie deux modélisations différentes de la trajectoire du chien.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

La situation est représentée par le graphique n$^{\text{o}}$ 1 donné en annexe.
À l'instant initial, le scooter est représenté par le point S_0. Le chien qui le poursuit est représenté par le point M_0. On considère qu'à chaque seconde, le chien s'oriente instantanément en direction du scooter et se déplace en ligne droite sur une distance de 1 mètre.
Ainsi, à l'instant initial, le chien s'oriente en direction du point S_0, et une seconde plus tard il se trouve un mètre plus loin au point M_1. À cet instant, le scooter est au point S_1. Le chien s'oriente en direction de S_1 et se déplace en ligne droite en parcourant 1 mètre, et ainsi de suite.
On modélise alors les trajectoires du chien et du scooter par deux suites de points notées (M_n) et (S_n).
Au bout de n secondes, les coordonnées du point S_n sont $(5\ ;\ n)$. On note $\left(x_n\ ;\ y_n\right)$ les coordonnées du point M_n.

1. Construire sur le graphique n$^{\text{o}}$ 1 donné en annexe les points M_2 et M_3.

2. On note d_n la distance entre le chien et le scooter n secondes après le début de la poursuite.
On a donc $d_n = M_nS_n$.
Calculer d_0 et d_1.

3. Justifier que le point M_2 a pour coordonnées $\left(1+\dfrac{4}{\sqrt{17}}\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & x_n + \dfrac{5-x_n}{d_n} \\ y_{n+1} & = & y_n + \dfrac{n-y_n}{d_n} \end{array}\right.$$

a. Le tableau ci-dessous, obtenu à l'aide d'un tableur, donne les coordonnées des points M_n et S_n ainsi que la distance d_n en fonction de n. Quelles formules doit-on écrire dans les cellules C5 et F5 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes C et F ?

	A	B	C	D	E	F
1	n	M_n		S_n		d_n
2		x_n	y_n	5	n	
3	0	0	0	5	0	5
4	1	1	0	5	1	4,123 105 63
5	2	1,970 142 5	0,242 535 63	5	2	3,502 672 91
6	3	2,835 155 47	0,744 285 12	5	3	3,126 467 89
7	4	3,527 580 47	1,465 774 98	5	4	2,930 924 04
...	...	...	...	...	...	...
28	24	4,999 797 51	21,226 834 2	5	24	2,773 165 8
29	25	4,999 870 53	22,226 834 2	5	25	2,773 165 8

b. On admet que la suite (d_n) est strictement décroissante.
Justifier que cette suite est convergente et conjecturer sa limite à l'aide du tableau.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

On modélise maintenant la trajectoire du chien à l'aide de la courbe $\mathscr{F}$ de la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,5[$ par :

$$f(x) = -2,5\ln(1-0,2x) - 0,5x + 0,05x^2.$$

Cela signifie que le chien se déplace sur la courbe $\mathscr{F}$ de la fonction f.

1. Lorsque le chien se trouve au point M de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ de la courbe $\mathscr{F}$, où x appartient à l'intervalle $[0\,;\,5[$, le scooter se trouve au point S, d'ordonnée notée y_S. Ainsi le point S a pour coordonnées $(5\,;\,y_S)$. La tangente à la courbe $\mathscr{F}$ au point M passe par le point S. Cela traduit le fait que le chien s'oriente toujours en direction du scooter. On note $d(x)$ la distance MS entre le chien et le scooter lorsque M a pour abscisse x.

a. Sur le graphique n° 2 donné en annexe, construire, sans calcul, le point S donnant la position du scooter lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathscr{F}$ et lire les coordonnées du point S.

b. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5[$ et on admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,5[$:

$$f'(x) = \frac{x(1-0,1x)}{5-x}.$$

Déterminer par le calcul une valeur approchée au centième de l'ordonnée du point S lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe $\mathscr{F}$.

2. On admet que $d(x) = 0,1x^2 - x + 5$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,5[$.
Justifier qu'au cours du temps la distance MS se rapproche d'une valeur limite que l'on déterminera.

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols.
Au 1er juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.

On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1er juillet de l'année $2012 + n$.

Partie A - Un modèle simple

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l c r} u_{n+1} & = & 1,1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} & = & 2\times 10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0,\text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

1. a. On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0.

b. Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1er juillet 2018.

2. Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5\,000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P = \dfrac{1}{15\,000}\begin{pmatrix} 1 & -5\,000 \\ -1 & 20\,000 \end{pmatrix}$.

On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = P \times D^n \times P$Í$-1 \times U_0$.

b. Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n.

c. On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{l c r} u_n & = & \dfrac{2,8\times 10^7 + 2\times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\ v_n & = & \dfrac{1\,400 + 400 \times 0,7^n}{15} \end{array}\right.$$

Décrire l'évolution des deux populations.

Partie B - Un modèle plus conforme à la réalité

Dans la réalité, on observe que si le nombre de renards a suffisamment baissé, alors le nombre de campagnols augmente à nouveau, ce qui n'est pas le cas avec le modèle précédent.
On construit donc un autre modèle, plus précis, qui tient compte de ce type d'observations à l'aide des relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l c r} u_{n+1} & = & 1,1u_n - 0,001r\,u_n \times v_n \\ v_{n+1} & = & 2\times 10^{-7}u_n \times v_n + 0,6v_n \end{array}\right. \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0,\text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

Le tableau ci-dessous présente ce nouveau modèle sur les 25 premières années en donnant les effectifs des populations arrondis à l'unité :

	A	B	C
1	Modèle de la **partie B**		
2	n	u_n	v_n
3	0	2 000 000	120
4	1	1 960 000	120
5	2	1 920 800	119
6	3	1 884 228	117
7	4	1 851 905	114
8	5	1 825 160	111
9	6	1 804 988	107
10	7	1 792 049	103
11	8	1 786 692	99
12	9	1 789 005	94
13	10	1 798 854	91
14	11	1 815 930	87
15	12	1 839 780	84
16	13	1 869 827	81
17	14	1 905 378	79
18	15	1 945 622	77
19	16	1 989 620	77
20	17	2 036 288	76
21	18	2 084 374	77
22	19	2 132 440	78
23	20	2 178 846	80
24	21	2 221 746	83
25	22	2 259 109	87
26	23	2 288 766	91
27	24	2 308 508	97

1. Quelles formules faut-il écrire dans les cellules B4 et C4 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes B et C ?

2. Avec le deuxième modèle, à partir de quelle année observe-t-on le phénomène décrit (baisse des renards et hausse des campagnols) ?

Partie C

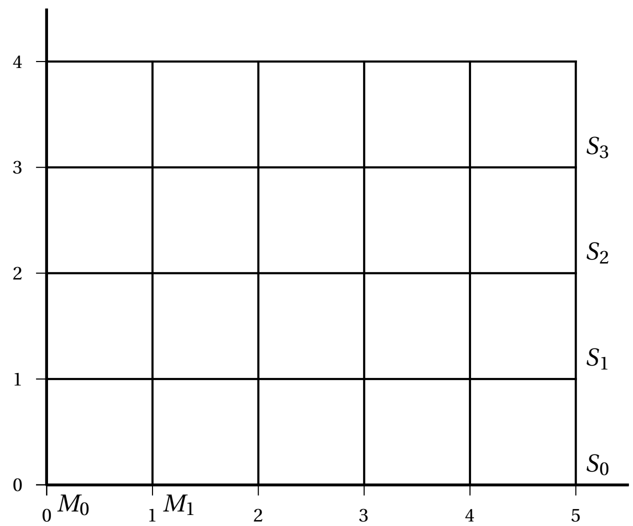
Dans cette partie on utilise le modèle de la partie B.
Est - il possible de donner à u_0 et v_0 des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel n on ait $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$? (On parle alors d'état stable.)

Annexe

À rendre avec la copie EXERCICE 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A, question 1
Graphique n° 1



Partie B, question 1
Graphique n° 2