Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud
21 novembre 2017

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : modélisation par une fonction

Le demi-contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-2x-2-3\ln x}{x}$.

1. Soit φ la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $\varphi(x) = x^2-1+3\ln x$.

a.
- $\varphi(1) = 1^2-1+3\ln 1 = 0$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x^2-1 = -1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2-1+3\ln x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(x) = -\infty$

b. La fonction φ est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et $\varphi'(x) = 2x+\dfrac{3}{x} > 0$ sur $]0~;~+\infty[$.

Donc la fonction φ est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.

On sait que $\varphi(1) = 0$ et que la fonction φ est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$, donc on en déduit que :

- $\varphi(x) < 0$ sur $]0~;~1[$;
- $\varphi(x) = 0$ pour $x = 1$;
- $\varphi(x) > 0$ sur $]1~;~+\infty[$.

2. **a.**
- Limite de f en 0.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x^2-2x-2 = -2\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3\ln x = -\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2-2x-2-3\ln x = +\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0 \text{ et } x>0\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

- Limite de f en $+\infty$: on écrit $f(x)$ sous la forme $f(x) = x-2-\dfrac{2}{x}-3\dfrac{\ln x}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x-2 = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

b. La fonction f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sa dérivée est égale à :

$$f'(x) = \dfrac{\left(2x-2-\dfrac{3}{x}\right)\times x-\left(x^2-2x-2-3\ln x\right)\times 1}{x^2} = \dfrac{2x^2-2x-3-x^2+2x+2+3\ln x}{x^2}$$
$$= \dfrac{x^2-1+3\ln x}{x^2} = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$$

La fonction φ s'annule pour $x = 1$; on calcule $f(1) = \dfrac{1^2-2-2-3\ln 1}{1} = -3$.

f' est du signe de φ ; on établit le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

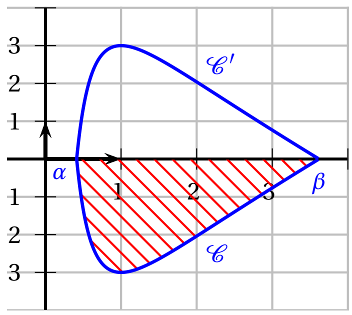
c. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0\,;\,1]$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$ et $f(1) = -3 < 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0\,;\,1]$. On appelle α cette solution.
Remarque : on peut aussi faire directement référence au tableau de variation de la fonction f pour répondre à cette question.

En tulisant le solveur de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 0{,}41$.
On admettra que l'équation $f(x) = 0$ a également une unique solution β sur $[1\,;\,+\infty[$ avec $\beta \approx 3{,}61$ à 10^{-2} près.

d. Soit F la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x - 2\ln x - \dfrac{3}{2}(\ln x)^2$.
La fonction F est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et :
$F'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x - 2 - 2 \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2}\left(2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x\right) = 2x - 2 - \dfrac{2}{x} - 3\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{2x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x} = f(x)$.
Donc la fonction F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : résolution du problème

Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f restreinte à l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$ ainsi que son symétrique $\mathscr{C}'$ par rapport à l'axe des abscisses.



Les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ délimitent la face supérieure du palet. Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de 0,5 cm.

Soit $\mathscr{D}$ le domaine hachuré délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$. Sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$, la fonction f est négative, donc l'aire de $\mathscr{D}$ est :
$\mathscr{A} = -\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = -\big(F(\beta) - F(\alpha)\big) \approx -(F(3{,}61) - F(0{,}41)) \approx 5{,}60$ unités d'aire (U.A.).
L'aire du domaine compris entre les deux courbes est $2\mathscr{A} \approx 11{,}20$ U.A
Une unité d'aire est égale à 2 cm^2 donc l'aire entre les deux courbes vaut environ 22,40 cm^2.
L'épaisseur du palet doit être de 0,5 cm donc le volume du palet est d'environ $22{,}40 \times 0{,}5 = 11{,}20$ cm^3.
Le volume, en cm^3, de 80 palets est donc $80 \times 11{,}20 = 896 < 1\,000$, donc la chocolaterie peut fabriquer 80 palets avec 1 000 cm^3, soit 1 litre de chocolat liquide.

EXERCICE 2 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. **a.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

b. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}\right) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$

- [AC] et [BD] sont les deux diagonales du carré ABCD donc les deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires ; on en déduit que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
- La droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABD) donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux ; on en déduit que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$;

Donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. On en déduit que $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BD}$.

c. On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ donc $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BE}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (BDE) ; le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BDE) donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal au plan (BDE).
On en déduit que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

3. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

a. $\overrightarrow{\text{AG}} = \overrightarrow{\text{AC}} + \overrightarrow{\text{AE}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}}$ donc le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ a pour coordonnées $(1\,;\,1\,;\,1)$.

D'après la question **1. c.**, la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) donc le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

Le plan (BDE) est l'ensemble des points M $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{\text{AG}} \perp \overrightarrow{\text{BM}}$.

Le point B a pour coordonnées $(1\,;\,0\,;\,0)$ donc le vecteur $\overrightarrow{\text{BM}}$ a pour coordonnées $(x-1\,;\,y\,;\,z)$.

$\overrightarrow{\text{AG}} \perp \overrightarrow{\text{BM}} \iff \overrightarrow{\text{AG}} \cdot \overrightarrow{\text{BM}} = 0 \iff (x-1)\times 1 + y \times 1 + z \times 1 = 0 \iff x+y+z-1=0$

Le plan (BDE) a donc pour équation $x+y+z-1=0$.

b.
- On détermine une représentation paramétrique de la droite (AG).
Cette droite passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,0)$ et a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,1)$.
La droite (AG) a donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbf{R}$
- Le point K d'intersection de (AG) et (BDE) a ses coordonnées qui sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{r c l} x &=& t\\ y &=& t\\ z &=& t\\ x+y+z-1 &=& 0 \end{array}\right.$
On déduit de ce système que $t+t+t-1=0$ donc que $t=\dfrac{1}{3}$.
Le point K a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

c. On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le volume de la pyramide BDEG est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times h \times \mathcal{A}$ où h est la hauteur de la pyramide issue de G. d'après les questions précédentes, cette hauteur h est la longueur GK.

$$\text{GK} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{12}{9}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 3 — 3 points

Commun à tous les candidats

Partie A :

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous dans lequel on a rajouté le centre de chaque classe :

Nombre de bactéries (en milliers)	[100; 120[	[120; 130[	[130; 140[	[140; 150[	[150; 160[	[160; 180[
Centre de la classe	110	125	135	145	155	170
Nombre de prélèvements	1 597	1 284	2 255	1 808	1 345	1 711

À l'aide de la calculatrice et en utilisant le centre de chaque classe, on peut estimer, pour le nombre de bactéries par prélèvement, la moyenne à 140,21 et l'écart-type à 19,16.

Partie B :

L'organisme décide alors de modéliser le nombre de bactéries étudiées (en milliers par ml) présentes dans la crème fraîche par une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres $\mu = 140$ et $\sigma = 19$.

1. **a.** Ce choix de modélisation est pertinent car on a trouvé une moyenne de 140,21 et un écart-type de 19,16 dans la **partie A**.

   b. À la calculatrice, on trouve $p = P(X \geqslant 160) \approx 0,146$.

2. Lors de l'inspection d'une laiterie, l'organisme de contrôle sanitaire analyse un échantillon de 50 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans la production de cette laiterie; 13 prélèvements contiennent plus de 160 milliers de bactéries, ce qui fait une fréquence de $f = \dfrac{13}{50} = 0,26$.

   a. Pour voir s'il y a une anomalie dans la production avec une probabilité de 0,05 de se tromper, on va utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

   $n = 50 \geqslant 30$, $np = 50 \times 0,146 = 7,3 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 50 \times (1-0,146) = 42,7 \geqslant 5$ donc les conditions pour qu'on détermine l'intervalle de fluctuation sont vérifiées :

   $$\begin{aligned} I_{95} &= \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ,\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0,146 - 1,96\frac{\sqrt{0,146(1-0,146)}}{\sqrt{50}}\ ,\ 0,146 + 1,96\frac{\sqrt{0,146(1-0,146)}}{\sqrt{50}}\right] \approx [0,048\ ;\ 0,244] \end{aligned}$$

   La fréquence $f = 0,26$ trouvée dans l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle I_{95} donc on peut supposer qu'il y a une anomalie dans la production avec une probabilité proche de 0,05 de se tromper.

   b. Avec une probabilité de 0,01 de se tromper, il faut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 99 % que l'on obtient en remplaçant dans l'intervalle précédent $u_{0,05} = 1,96$ par $u_{0,01} = 2,58$:

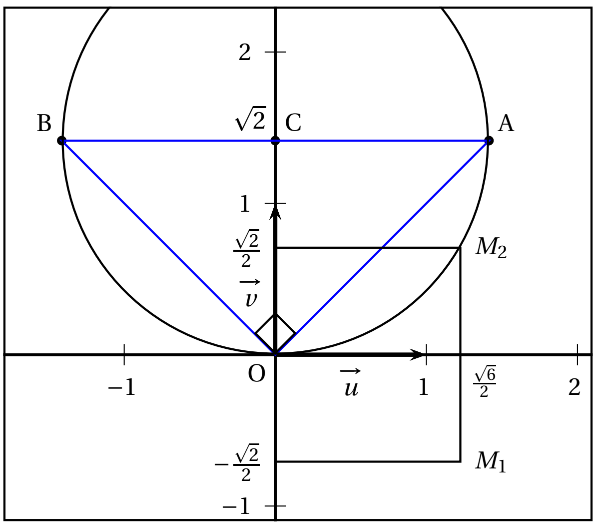
   $$\begin{aligned} I_{99} &= \left[p - 2.58\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ,\ p + 2.58\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0,146 - 2,58\frac{\sqrt{0,146(1-0,146)}}{\sqrt{50}}\ ,\ 0,146 + 2,58\frac{\sqrt{0,146(1-0,146)}}{\sqrt{50}}\right] \approx [0,017\ ;\ 0,275] \end{aligned}$$

   La fréquence calculée de 0,26 dans l'échantillon appartient à l'intervalle I_{99} donc l'organisme n'aurait pas pu affirmer qu'il y avait une anomalie avec une probabilité proche de 0,01 de se tromper.

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_{\text{B}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$



1.

Méthode 1

- On a OA $= |z_A| = 2$; de même
- OB $= |z_B| = 2$. OA = OB : le triangle est isocèle en O.
- On a $\widehat{AOB} = \arg z_B - \arg z_A = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$: le triangle est rectangle en O.

Conclusion : le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

Méthode 2

- On a OA $= |z_A| = 2$;
- OB $= |z_B| = 2$; on a donc OA = OB = 2 : le triangle OAB est isocèle en O ;
- AB $= |z_B - z_A| = \left|2e^{i\frac{3\pi}{4}} - 2e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \left|2\left(e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right| = 2\left|e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}}\right| =$
  $2\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - 1\right)\right|$.
  Or $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, donc puisque $\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 1$:
  OA $= 2|i - 1| = 2\sqrt{1^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$. On a donc :
  $OA^2 + OB^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ et
  $AB^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 \times 2 = 8$.
  Donc $OA^2 + OB^2 = AB^2 = 8$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en O.

Méthode 3

On a $z_B = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Donc $z_B = iz_A$; en exploitant cette égalité en termes de modules et d'arguments :

- $|z_B| = |iz_A| = |i \times |z_A|$, donc $|z_B| = |z_A|$, soit OB = OA ;
- $\arg z_B = \arg i + \arg z_A$, soit $\arg z_B = \dfrac{\pi}{2} + \arg z_A$, ce qui signifie que $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Le triangle OAB est rectangle en O.

2. D'après la question précédente le triangle AOB est inscrit dans le cercle centré au milieu de [AB], soit en C d'affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{4}} + 2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

On sait que $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et

$e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc

$z_C = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = i\sqrt{2}$.

Rem. On pouvait aussi calculer :

$e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(1 + e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}(1 + i) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = i\sqrt{2}$.

On a donc CO $= |CO| = \sqrt{2}$.

Le cercle circonscrit au triangle OAB et donc centré en C et a pour rayon $\sqrt{2}$.

Équation (E) : on a $\Delta = 6 - 8 = -2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2$.

Cette équation a donc deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2 affixes des points M_1 et M_2 :

- $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$.

Le carré de la distance du point M_1 d'affixe z_1 au point C est :

$|z_1 - z_C|^2 = \left|\dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2}\right|^2 = \left|\dfrac{\sqrt{6} - i3\sqrt{2}}{2}\right|^2 = \dfrac{6}{4} + \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{2} = 6$. Donc $CM_1 = \sqrt{6} \neq \sqrt{2}$.

On pouvait éviter le calcul en remarquant qu'un point de partie imaginaire négative ne peut appartenir au cercle.

- $z_2 = \dfrac{\sqrt{6}+\text{i}\sqrt{2}}{2}$.

  Le carré de la distance du point M_2 d'affixe z_2 au point C est :

  $|z_2 - z_C|^2 = \left|\dfrac{\sqrt{6}+\text{i}\sqrt{2}}{2} - \text{i}\sqrt{2}\right|^2 = \left|\dfrac{\sqrt{6}-\text{i}\sqrt{2}}{2}\right|^2 = \dfrac{6}{4}+\dfrac{2}{4} = \dfrac{8}{4} = 2$. Don C$M_2 = \sqrt{2}$, donc le point M_2 appartient au cercle circonscrit au triangle AOB

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

1. Augmenter de 5 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{5}{100} = 1{,}05$; la suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0 = 12$ et de raison $q = 1{,}05$.

   Donc, pour tout n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 12 \times 1{,}05^n$.
2. Il faut regarder si ce modèle permet de limiter la population à 60 000 individus, autrement dit chercher n tel que $v_n > 60$; on résout l'inéquation :

   $v_n > 60 \iff 12 \times 1{,}05^n > 60 \iff 1{,}05^n > 5 \iff \ln\left(1{,}05^n\right) > \ln(5)$

   $\iff n\ln(1{,}05) > \ln(5) \iff n > \dfrac{\ln(5)}{\ln(1{,}05)}$

   $\dfrac{\ln(5)}{\ln(1{,}05)} \approx 32{,}99$ donc pour $n = 33$ c'est-à-dire en 2049, la population dépassera 60 000 individus.

   Ce modèle ne répond donc pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1{,}1}{605}u_n^2 + 1{,}1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = -\dfrac{1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x$.

   a. La fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $g'(x) = -\dfrac{1{,}1}{605} \times 2x + 1{,}1 = -\dfrac{2{,}2}{605}x + 1{,}1$.

   $g'(x) > 0 \iff -\dfrac{2{,}2}{605}x + 1{,}1 > 0 \iff 1{,}1 > \dfrac{2{,}2}{605}x \iff \dfrac{1{,}1 \times 605}{2{,}2} > x \iff x < 302{,}5$

   Donc $g'(x) > 0$ sur $[0\,;\,60]$ donc g est croissante sur $[0\,;\,60]$.

   b. On résout dans $\mathbf{R}$ l'équation $g(x) = x$:

   $g(x) = x \iff -\dfrac{1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x = x \iff -\dfrac{1{,}1}{605}x^2 + 0{,}1x = 0 \iff x\left(-\dfrac{1{,}1}{605}x + 0{,}1\right) = 0$

   $\iff x = 0 \text{ ou } -\dfrac{1{,}1}{605}x + 0{,}1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 0{,}1 = \dfrac{1{,}1}{605}x \iff x = 0 \text{ ou } 0{,}1 \times \dfrac{605}{1{,}1} = x$

   $\iff x = 0 \text{ ou } x = 55$
2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.

   a. $u_1 = g(u_0) = g(12) \approx 12{,}938$

   Avec ce modèle, on peut estimer la population à 12 938 individus en 2017.

   b. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

   - **Initialisation**

     Pour $n = 0$, $u_0 = 12$ et $0 \leqslant 12 \leqslant 55$ donc la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**
  On suppose que le propriété est vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  Or $0 \in [0\,;\,60]$ et $55 \in [0\,;\,60]$; de plus on sait que le fonction g est croissante sur $[0\,;\,60]$ donc de $0 \leqslant u_n \leqslant 55$, on peut déduire que $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(55)$.
  Les nombres 0 et 55 sont solutions de l'équation $g(x) = x$ donc $g(0) = 0$ et $g(55) = 55$; de plus, $g(u_n) = u_{n+1}$.
  Donc $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(55)$ équivaut à $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 55$ et on a donc démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donx démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

c. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 0,1u_n = u_n\left(-\dfrac{1,1}{605}u_n + 0,1\right)$

$$= u_n \times \dfrac{1,1}{605}\left(-u_n + 0,1 \times \dfrac{605}{1,1}\right) = \dfrac{1,1}{605}u_n\,(55 - u_n)$$

On sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$ donc $55 - u_n \geqslant 0$ donc $\dfrac{1,1}{605}u_n\,(55 - u_n) \geqslant 0$.
On a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n donc la suite (u_n) est croissante.

d. La suite (u_n) est croissante et majorée par 55 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$ donc elle est solution de l'équation $g(x) = x$.
L'équation $g(x) = x$ n'admet que 2 solutions : 0 et 55.
La suite (u_n) est croissante et $u_0 = 12$ donc la limite ℓ de la suite est supérieure ou égale à 12.
On en déduit donc que $\ell = 55$ ce qui signifie que, selon ce modèle, la population va tendre vers 55 000 individus.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
On complète l'algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$:

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant Que $u < 50$
	u prend la valeur $1,1u - \frac{1,1}{605}u^2$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant Que
Sortie	Afficher n

Exercice 5 — 5 points

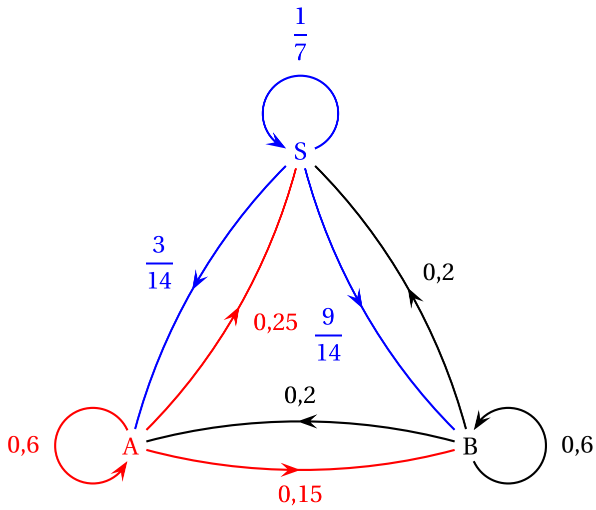
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On note p la probabilité qu'un joueur solitaire un jour donné passe dans l'équipe A le jour suivant.
D'après le texte, un joueur solitaire garde ce statut avec une probabilité de $\dfrac{1}{7}$ donc il change de statut avec une probabilité de $1 - \dfrac{1}{7} = \dfrac{6}{7}$.
On sait de plus qu'il rejoint l'équipe B avec une probabilité 3 fois plus élevée que celle de rejoindre l'équipe A ; la probabilité de changer d'équipe se répartit donc en $\dfrac{3}{4}$ pour rejoindre l'équipe B et $\dfrac{1}{4}$ pour rejoindre l'équipe A.

La probabilité de rejoindre l'équipe A est donc de $\frac{1}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{3}{14}$.

Celle de rejoindre l'équipe B est 3 fois plus élevée donc égale à $\frac{9}{14}$.

2. **a.** On complète le graphe probabiliste :



b. On admet que la matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on a donc $U_{n+1} = U_n T$.

On appelle $\mathscr{P}_n$ la propriété : $U_n = U_0 T^n$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, T^0 est la matrice identité d'ordre 3 donc $U_0 = U_0 T^0$.
  La propriété est donc vérifiée pour $n = 0$.
- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie pour $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $U_n = U_0 T^n$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  $U_{n+1} = U_n T = (U_0 T^n) T = U_0 T^{n+1}$
  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout naturel n, $U_n = U_0 T^n$.

c. Au bout d'une semaine, c'est-à-dire de 7 jours, l'état probabiliste est $U_7 = U_0 T^7 \approx \begin{pmatrix} 0{,}338 & 0{,}457 & 0205 \end{pmatrix}$.

3. On pose $V = \begin{pmatrix} 300 & 405 & 182 \end{pmatrix}$.

a. En utilisant la calculatrice, on trouve que $VT = V$.

b. Un état stable est une matrice $S = \begin{pmatrix} a & b & s \end{pmatrix}$ qui vérifie à la fois $a + b + s = 1$ et $ST = S$.

D'après la question précédente, on peut dire que la matrice $S = \frac{1}{300 + 405 + 182} \begin{pmatrix} 300 & 405 & 182 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{300}{887} & \frac{405}{887} & \frac{182}{887} \end{pmatrix}$ est la matrice correspondant à l'état stable du système.

4. On donne l'algorithme suivant, où la commande « $U[i]$ » renvoie le coefficient de la i-ème colonne d'une matrice ligne U.

Variables	k un entier naturel U une matrice de taille 1×3 T une matrice carrée d'ordre 3
Traitement	U prend la valeur $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ T prend la valeur $\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$ Pour k allant de 1 à 7 U prend la valeur UT Fin Pour
Sortie	Afficher $U[1]$

a. La valeur numérique arrondie au millième affichée en sortie de l'algorithme est le coefficient de la 1re colonne de U_7 soit 0,338 (voir question 2.c.).

Ce nombre de 0,338 correspond à la fréquence des joueurs dans l'équipe A au bout de 7 jours.

b. On modifie l'algorithme pour qu'il affiche la fréquence de joueurs solitaires au bout de 13 jours :

Variables	k un entier naturel U une matrice de taille 1×3 T une matrice carrée d'ordre 3
Traitement	U prend la valeur $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ T prend la valeur $\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$ Pour k allant de 1 à 13 U prend la valeur UT Fin Pour
Sortie	Afficher $U[3]$