Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, les valeurs seront, si nécessaire, approchées au millième.
Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Dans le cadre de son activité, une entreprise reçoit régulièrement des demandes de devis. Les montants de ces devis sont calculés par son secrétariat. Une étude statistique sur l'année écoulée conduit à modéliser le montant des devis par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2900$ euros et d'écart-type $\sigma = 1250$ euros.

1. Si on choisit au hasard une demande de devis reçue par l'entreprise, quelle est la probabilité que le montant du devis soit supérieur à 4 000 euros ?

Solution : On cherche $P(X \geqslant 4000)$
D'après la calculatrice on a $P(X \geqslant 4000) \approx 0{,}189$

2. Afin d'améliorer la rentabilité de son activité, l'entrepreneur décide de ne pas donner suite à 10 % des demandes. Il écarte celles dont le montant de devis est le moins élevé. Quel doit être le montant minimum d'un devis demandé pour que celui-ci soit pris en compte ? Donner ce montant à l'euro près.

Solution : On cherche le réel x tel que $P(X \leqslant x) = 0{,}10$
À l'aide de la calculatrice on trouve $x \approx 1298$
Donc pour être accepté, un devis devra être d'un montant supérieur ou égal à 1 298 euros

Partie B

Ce même entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam, Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé « dossier spam ». Le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés. De son côté, l'entrepreneur sait que 60 % des messages qu'il reçoit sont des spams. Après installation du logiciel, il constate que 58,6 % des messages sont déplacés dans le dossier spam. Pour un message pris au hasard, on considère les évènements suivants :

- D : « le message est déplacé » ;
- S : « le message est un spam ».

1. Calculer $P(S \cap D)$.

Solution : L'énoncé donne $P_S(D) = 0{,}95$ et $P(S) = 0{,}6$
donc $P(S \cap D) = P_S(D) \times P(S) = 0{,}57$

2. On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à 0,04.

Solution : On cherche $P_{\overline{S}}(D)$. L'énoncé donne $P(D) = 0{,}586$.
Comme S et $\overline{S}$ forment une partition de l'univers alors d'après les probabilités totales on a :
$P(D) = P(S \cap D) + P\left(\overline{S} \cap D\right)$ soit $P\left(\overline{S} \cap D\right) = P(D) - P(S \cap D) = 0{,}586 - 0{,}57 = 0{,}016$
donc $P_{\overline{S}}(D) \times P\left(\overline{S}\right) = P\left(\overline{S} \cap D\right) = 0{,}016$ or $P\left(\overline{S}\right) = 1 - P(S) = 0{,}4$

On a donc bien $P_{\overline{S}}(D) = \dfrac{P\left(\overline{S} \cap D\right)}{P\left(\overline{S}\right)} = \dfrac{0{,}016}{0{,}4} = 0{,}04$

3. On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ?

Solution : On cherche $P_{\overline{D}}(S)$.

$$P_{\overline{D}}(S) = \frac{P\left(\overline{D} \cap S\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{P_S\left(\overline{D}\right) \times P(S)}{1 - P(D)} = \frac{(1 - P_S(D)) \times 0{,}6}{0{,}414} = \frac{0{,}03}{0{,}414} = \frac{5}{69} \approx 0{,}0725$$

4. Pour le logiciel choisi par l'entreprise, le fabricant estime que 2,7 % des messages déplacés vers le dossier spam sont des messages fiables. Afin de tester l'efficacité du logiciel, le secrétariat prend la peine de compter le nombre de messages fiables parmi les messages déplacés. Il trouve 13 messages fiables parmi les 231 messages déplacés pendant une semaine.
Ces résultats remettent-ils en cause l'affirmation du fabricant ?

Solution : La proportion théorique supposée de messages fiables parmi les déplacés est $p = 0{,}027$.
La taille de l'échantillon étudié est $n = 231$.
On a $n \geqslant 30$, $np \approx 6 \geqslant 5$ et $n(1-p) \approx 225 \geqslant 5$, on peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%

$$I = \left[p - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\ ;\ p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}\right]$$

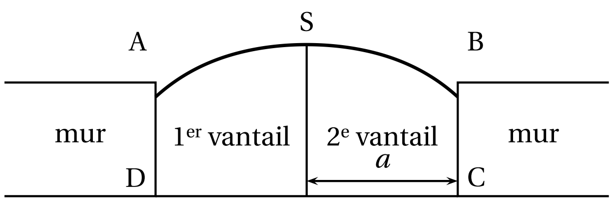
$p - 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{n} \approx 0{,}0061$ et $p + 1{,}96 \times \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{n} \approx 0{,}0479$

La fréquence observée de messages fiables parmi les déplacées est $f = \dfrac{13}{231} \approx 0{,}056$ alors $f \notin I$
On peut donc affirmer, au risque de 5% de se tromper, que l'estimation du frabricant est erronée.

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.

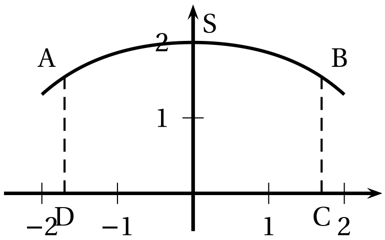
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur [−2 ; 2] par :

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a\ ;\ f(-a))$, $(a\ ;\ f(a))$, $(a\ ;\ 0)$ et $(-a\ ;\ 0)$ et on note S le sommet de la courbe de f, comme illustré ci-contre.



Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?

Solution : $f(-x) = -\frac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{-x}{b}} + \mathrm{e}^{-\frac{-x}{b}}\right) + \frac{9}{4} = -\frac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} = f(x)$
On a donc bien pour tout x de $[-2\ ;\ 2]$, $f(-x) = f(x)$.
On en déduit que f est paire et que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right).$$

Solution : f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f = -\frac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{u} + \mathrm{e}^{-u}\right) + \frac{9}{4} \quad \Longrightarrow \quad f' = -\frac{b}{8}\left(u'\mathrm{e}^{u} - u'\mathrm{e}^{-u}\right) = -\frac{b}{8} \times u'\left(\mathrm{e}^{u} - \mathrm{e}^{-u}\right)$
avec $u(x) = \frac{x}{b} \Longrightarrow u'(x) = \frac{1}{b}$
Finalement pour tout x de $[-2\ ;\ 2]$, $f'(x) = -\frac{b}{8} \times \frac{1}{b}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right) = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

Solution : $f'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{\frac{x}{b}}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{\frac{x}{b}} \leqslant 0 &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{b}} \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\\
&\Longleftrightarrow \frac{x}{b} \geqslant -\frac{x}{b}\\
&\Longleftrightarrow \frac{2x}{b} \geqslant 0\\
&\Longleftrightarrow x \geqslant 0 \text{ car } b > 0
\end{aligned}$$

On en déduit les variations de f sur $[-2\ ;\ 2]$:

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-2)$	↗	$\frac{9-b}{4}$	↘	$f(2)$

On en déduit les coordonnées du sommet : $\mathrm{S}\left(0\ ;\ \frac{9-b}{4}\right)$.

Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

1. Justifier que $b = 1$.

Solution : S est à 2 m du sol donc son ordonnée est 2 d'où $\dfrac{9-b}{4} = 2 \iff b = 1$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ et en déduire une valeur approchée de a au centième.

Solution : $f(0) = 2$ et $f(2) = -\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{2}\right) + \dfrac{9}{4} \approx 1{,}31$
Sur $[0\,;\,2]$, f est continue et strictement décroissante à valeurs dans $\left[f(2)\,;\,2\right]$ or $1{,}5 \in \left[f(2)\,;\,2\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution sur $[0\,;\,2]$
Par balayage on obtient $1{,}762 < a < 1{,}763$ soit $a \approx 1{,}76$

3. Dans cette question, on choisit $a = 1{,}8$ et $b = 1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2}. Que décide le client ?

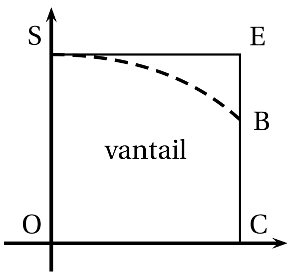
Solution : L'aire d'un vantail est donné par $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ car $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,a]$ et l'unité d'aire est de 1 m^2.

$$\int_0^{1,8} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1,8}\left(-\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{9}{4}x\right]_0^{1,8} = \left[-\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{1,8} - \mathrm{e}^{-1,8}\right) + 0{,}405\right] - 0 \approx 3{,}314$$

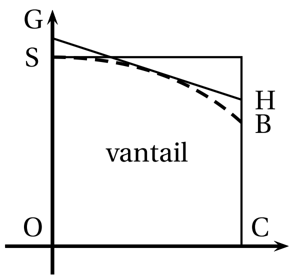
Donc un vantail pèse environ $20 \times 3{,}3 = 66$ kg. Le client va donc décider de motoriser son portail.

Partie C

On conserve les valeurs $a = 1{,}8$ et $b = 1$.
Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle



Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.
Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.
On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze :

$$\text{Aire } = \frac{b+B}{2} \times h.$$

Solution : L'aire du rectangle OCES est $\text{OS} \times \text{OC} = 2a = 3{,}6 \text{ m}^2$
La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
donc $\text{OG} = -f'(1) + f(1) \approx 2{,}158$ en remplaçant x par 0 dans l'équation précédente.
De même $\text{HC} = 0{,}8 f'(1) + f(1) \approx 1{,}629$ en remplaçant x par $a = 1{,}8$.
L'aire du trapèze est donc $\dfrac{\text{HC}+\text{OG}}{2} \times \text{OC} \approx \dfrac{3{,}787}{2} \times 1{,}8 = 0{,}9 \times 3{,}787 \approx 3{,}41 \text{ m}^2$
L'économie avec la formule 2 serait donc d'environ $0{,}2 \text{ m}^2$ par vantail soit $0{,}4 \text{ m}^2$ pour le portail.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.
On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

Solution : $u_0 + u_1 = u_0 \times u_1 \iff 3 + u_1 = 3u_1 \iff 2u_1 = 3 \iff u_1 = \dfrac{3}{2}$
$u_0 + u_1 + u_2 = u_0 \times u_1 \times u_2 \iff \dfrac{9}{2} + u_2 = \dfrac{9}{2}u_2 \iff \dfrac{7}{2}u_2 = \dfrac{9}{2} \iff u_2 = \dfrac{9}{7}$

2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.
On a en particulier $s_1 = u_0$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

Solution :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = s_n + u_n$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$ donc $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \geqslant 0$ d'où $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} \geqslant u_0 > 1$

b. En déduire que pour tout entier $n > 0$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_{n+1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1} \times u_n = s_n \times u_n$
or $s_{n+1} = s_n + u_n$ d'après la question précédente.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_n \times u_n = s_n + u_n \iff u_n(s_n - 1) = s_n \iff u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$ car $s_n \neq 1$

c. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.

Solution : u_n est le quotient de deux réels strictement positifs car $s_n > 1$ or le dénominateur est plus petit que le numérateur on en déduit donc que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

3.

À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.

a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

Entrée :	Saisir n
	Saisir u
Traitement :	s prend la valeur u
	Pour i allant de 1 à n :
	u prend la valeur ...
	s prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

Solution :

Traitement :	s prend la valeur u
	Pour i allant de 1 à n :
	u prend la valeur $\dfrac{s}{s-1}$
	s prend la valeur $s+u$
	Fin Pour

b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

Solution : Il semblerait que la suite (u_n) converge vers 1.

4. **a.** Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ donc s_n est la somme de n nombres tous strictement supérieurs à 1, on a donc bien

$\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n > n$.

b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

Solution : Par comparaison, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$

et par quotient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 4 **5 points**

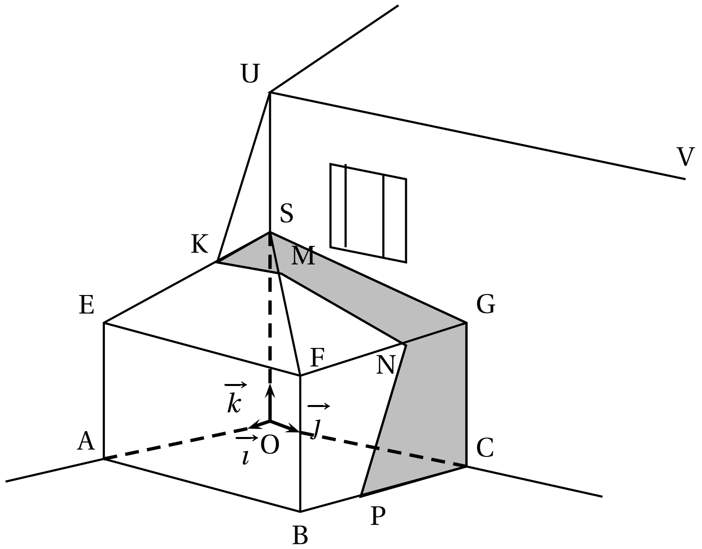
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.

- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes [UV] et [EF] des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment [SE], le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP qui est la limite ombre-soleil.



1. Sans calcul, justifier que :

a. le segment [KM] est parallèle au segment [UV] ;

Solution : Le plan (UVK) et le plan (SEF) contiennent deux droites parallèles (EF) et (UV).
Ces deux plans se coupent suivant la droite (KM) donc d'après le théorème du toit on en déduit que (KM) et (UV) sont parallèles

b. le segment [NP] est parallèle au segment [UK].

Solution :
Le plan (UVK) coupe le plan (SOA) suivant la droite (UK) et le plan (BCG) suivant la droite (NP).
Les plans (SOA) et (BCG) sont verticaux donc parallèles (du moins on doit le supposer) ; on en déduit alors que les droites (UK) et (NP) sont parallèles.

2. Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les coordonnées des différents points sont les suivantes : A(4 ; 0 ; 0), B(4 ; 5 ; 0), C(0 ; 5 ; 0),
E(4 ; 0 ; 2, 5), F(4 ; 5 ; 2,5), G(0 ; 5 ; 2,5), S(0 ; 0 ; 3,5), U(0 ; 0 ; 6) et V(0 ; 8 ; 6).
On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UVK) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.

a. Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1,2. Vérifier que les coordonnées du point K sont (1,2 ; 0 ; 3,2).

Solution : $K \in [SE]$ donc $\overrightarrow{SE}$ et $\overrightarrow{SK}$ sont colinéaires donc il existe un réel α non nul tel que $\overrightarrow{SK} = \alpha\overrightarrow{SE}$

$\overrightarrow{SE}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$ or l'abscisse de $\overrightarrow{SK}$ est 1,2.

On en déduit que $\alpha = 0{,}3$ d'où $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix}1{,}2\\0\\-0{,}3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_K - x_S\\y_K - y_S\\z_K - z_S\end{pmatrix}$ soit K(1,2 ; 0 ; 3,2)

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(7\,;0\,;3)$ est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).

Solution : $\overrightarrow{UV}\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{UK}\begin{pmatrix}1,2\\0\\-2,8\end{pmatrix}$

On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{UV} = 0+0+0 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{UK} = 8,4+0-8,4 = 0$

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (UVK) puisqu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

On en déduit (UVK) : $7x+3z+d=0$ or $\mathrm{U}(0\,;0\,;6) \in$ (UVK).

Finalement (UVK) a pour équation : $7x+3z-18=0$.

c. Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).

Solution :

première méthode : astucieuse

On remarque que la droite (FG) est l'ensemble des points de l'espace vérifiant $y=5$ et $z=2,5$

Le point d'intersection entre (UVK) et (FG) vérifie donc $\begin{cases}7x+3z-18=0\\y=5\\z=2,5\end{cases} \iff \begin{cases}x=1,5\\y=5\\z=2,5\end{cases}$

deuxième méthode : classique

Une représentation paramétrique de la droite (FG) est $\begin{cases}x=4-4t\\y=5\\z=2,5\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ car $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$

On doit résoudre le système $\begin{cases}x=4-4t\\y=5\\z=2,5\\7x+3z-18=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=4-4t\\y=5\\z=2,5\\28t=17,5\end{cases} \iff \begin{cases}x=4-4t\\y=5\\z=2,5\\t=\dfrac{5}{8}\end{cases} \iff \begin{cases}x=1,5\\y=5\\z=2,5\end{cases}$

Finalement $\mathrm{N}(1,5\,;5\,;2,5)$

d. Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.

Solution : On place d'abord le point K sur [SE] en utilisant $\overrightarrow{SK} = 0,3\overrightarrow{SE}$.

On trace ensuite la parallèle à (UV) passant par K pour trouver M sur [SF].

On place N sur [FG] en utilisant $\overrightarrow{FN} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{FG}$

Puis on trace [MN] et la parallèle à (UK) passant par N pour trouver P

3. Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment [SG] avec l'horizontale doit être supérieur à 7°. Cette condition est-elle remplie ?

Solution : $\overrightarrow{GS}\cdot\overrightarrow{CO} = \mathrm{GS}\times\mathrm{CO}\times\cos\left(\overrightarrow{GS}, \overrightarrow{CO}\right)$

$\overrightarrow{GS}\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{GS}=\sqrt{26}$, CO=5 et $\overrightarrow{GS}\cdot\overrightarrow{CO} = 25$

On a alors $\cos\left(\overrightarrow{GS}, \overrightarrow{CO}\right) = \dfrac{25}{5\sqrt{26}} = \dfrac{5\sqrt{26}}{26}$.
On en déduit $\left(\overrightarrow{GS}, \overrightarrow{CO}\right) \approx 11°$.
La condition est donc remplie.

Exercice 4 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

Une association gère des activités pour des enfants. Elle propose deux programmes d'activités, le programme A : cirque - éveil musical, et le programme B : théâtre - arts plastiques.
À sa création en 2014, l'association compte 150 enfants qui suivent tous le programme A.
Pour chacune des années suivantes, le nombre d'enfants inscrits dans l'association reste égal à 150.
On dispose également des informations suivantes :
Chaque enfant ne peut suivre qu'un seul programme : soit le programme A, soit le programme B.
D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association.
D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent à nouveau le programme B et les autres quittent l'association.
Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A.

On modélise le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année $2014+n$ respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) et on note U_n la matrice ligne $\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$. On a donc $U_0 = \begin{pmatrix}150 & 0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = U_n M$ où $M = \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,4 & 0,6\end{pmatrix}$.

Solution : D'après l'énoncé le nombre de personnes quittant l'association à la fin de l'année n est donné par $0,4a_n + 0,4b_n$
D'une année sur l'autre le programme A récupère 20% des ses anciens inscrits et les nouveaux inscrits correspondants au nombre des personnes ayant quitté l'association à la fin de l'année précédente. On a donc $a_{n+1} = 0,2a_n + 0,4a_n + 0,4b_n = 0,6a_n + 0,4b_n$.
De même $b_{n+1} = 0,4a_n + 0,6b_n$.
La situation est donc résumée par le système (S) : $\begin{cases} a_{n+1} = 0,6a_n + 0,4b_n \\ b_{n+1} = 0,4a_n + 0,6b_n \end{cases}$

$(S) \iff U_{n+1} = U_n M$ avec $M = \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,4 & 0,6\end{pmatrix}$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix}75+75\times 0,2^n & 75-75\times 0,2^n\end{pmatrix}$.

Solution : On démontre cette propriété par récurrence.
Initialisation : $U_0 = (150\ \ 0)$ et $\begin{pmatrix}75+75\times 0,2^0 & 75-75\times 0,2^0\end{pmatrix} = (150\ \ 0)$.
La propriété est donc vérifiée au rang 0.

Hérédité : soit un entier naturel quelconque $p \geqslant 0$ tel que $u_p = \begin{pmatrix}75+75\times 0,2^p & 75-75\times 0,2^p\end{pmatrix}$.
Alors $U_{p+1} = U_p M$
$= \begin{pmatrix}0,6\times(75+75\times 0,2^p)+0,4\times(75-75\times 0,2^p) & 0,4\times(75+75\times 0,2^p)+0,6\times(75-75\times 0,2^p)\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 75 + 0{,}2 \times 75 \times 0{,}2^p & 75 - 0{,}2 \times 75 \times 0{,}2^p \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0{,}2^{p+1} & 75 - 75 \times 0{,}2^{p+1} \end{pmatrix}$

La propriété est donc héréditaire.

La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $p \geqslant 0$, ell est vraie au rang $p+1$.
Finalement on a bien d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0{,}2^n & 75 - 75 \times 0{,}2^n \end{pmatrix}$

3. En déduire la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes.

Solution : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$ car $-1 < 0{,}2 < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \begin{pmatrix} 75 & 75 \end{pmatrix}$
Donc à long terme les effectifs s'équilibreront entre les deux programmes.

Partie B

L'association affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1c_2c_3c_4c_5k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

- on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9 ;
- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k.

Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsque le sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1. Dans cette question seulement, on choisit $a = 3$.

a. Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?

Solution : Pour ce numéro, $S = 1+1+8+3 \times (1+3) = 22$ et $22 = 10 \times 2 + 2$ donc la clé associée au cinq premiers chiffres est 2 et non 3.
Le numéro indiqué ne peut donc pas avoir été attribué à un enfant de l'association.

b. L'employé, confondant un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08c_3c_4c_5k$ est transformé en $11c_3c_4c_5k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ?

Solution : Soit S_1 et S_2 les sommes associées à ces deux numéros.
$S_1 = c_3 + c_5 + 3 \times (8 + c_4) = c_3 + 3c_4 + c_5 + 24$ et $S_2 = 1 + c_3 + c_5 + 3 \times (1 + c_4) = c_3 + 3c_4 + c_5 + 4 = S_1 + 20$
On a donc $S_2 \equiv S_1 (10)$ donc les clés associées à ces deux séries de cinq chiffres sont les mêmes.
L'erreur ne sera donc pas détectée.

2. On note $c_1c_2c_3c_4c_5k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont intervertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.

a. Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $(a-1)(c_4 - c_3)$ est congru à 0 modulo 10.

Solution : Soit S la somme avant l'inversion et S_i la somme après l'inversion.
$S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ et $S_i = c_1 + c_4 + c_5 + a \times (c_2 + c_3)$
La clé ne détecte pas l'erreur si et seulement si $S \equiv S_i [10]$.

$$\begin{aligned} S_i \equiv S(10) &\iff S - S_i \equiv 0(10) \\ &\iff c_3 - c_4 + a(c_4 - c_3) \equiv 0(10) \\ &\iff (a-1)(c_4 - c_3) \equiv 0(10) \end{aligned}$$

b. Déterminer les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \quad (10)$.

Solution : Pour $n = 0$, toute valeur de p entre 1 et 9 amène $np \equiv 0 \quad (10)$
Pour $n \in \{1 ; 3 ; 7 ; 9\}$, il n'existe aucune valeur de p permettant de vérifier la condition.
Pour $n \in \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ seul $p = 5$ convient.
Pour $n = 5$ alors pour tout $p \in \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ la condition est vérifiée.
Finalement pour tout $n \in \{2 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8\}$ il existe au moins un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \quad (10)$.

c. En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.

Solution : $1 \leqslant a \leqslant 9 \iff 0 \leqslant a - 1 \leqslant 8$
Les valeurs $a - 1$ ne permettant pas la détection d'inversion entre c_3 et c_4 sont $\{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8\}$.
Donc celles permettant la détection systématique sont $\{1 ; 3 ; 5 ; 7\}$.
Finalement les valeurs de a permettant à coups sûr la détection de l'inversion entre c_3 et c_4 sont $\{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ donc les valeurs paires possibles de a.