

Durée : 4 heures

A. P. M. E. P.

◌ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ◌
17 novembre 2016

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x} - 0,1.$$

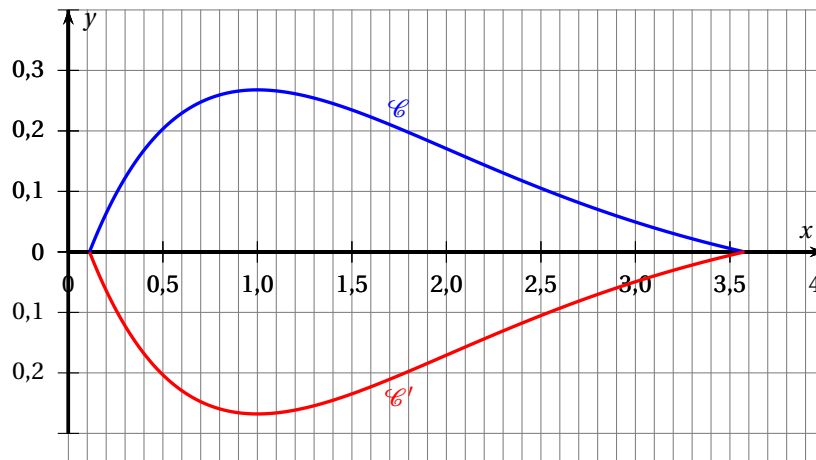
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ et dresser le tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$ dans un repère orthogonal et \mathcal{C}' la courbe symétrique de \mathcal{C} par rapport à l'axe des abscisses.

L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.

Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F , définie sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$ par

$$F(x) = -(x+1)e^{-x} - 0,1x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha ; \beta]$.

5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à 0,01 près de l'aire du domaine compris entre les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' .
On utilisera les valeurs arrondies à 0,001 près suivantes : $\alpha \approx 0,112$ et $\beta \approx 3,577$.
6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.

EXERCICE 2**4 points****Commun à tous les candidats**

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note X la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes.

Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type σ .

1.
 - a. Pour tout nombre réel t positif, déterminer une relation entre $P(X \leq 125 - t)$ et $P(X \geq 125 + t)$.
 - b. On sait que 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture. En utilisant la relation précédente, déterminer $P(121 \leq X \leq 129)$.
2. Déterminer une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que $P(123 \leq X \leq 127) = 0,68$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $\sigma = 2$.

3. On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.
 - a. On choisit au hasard un pot de confiture de la production. Déterminer la probabilité que ce pot soit conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.
 - b. On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.
4. On admet que la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un pot de confiture soit conforme est 0,988.
On choisit au hasard 900 pots dans la production. On constate que 871 de ces pots sont conformes. Au seuil de 95 % peut-on rejeter l'hypothèse suivante : « La machine est bien réglée » ?

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

On se place dans le plan complexe rapporté au repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

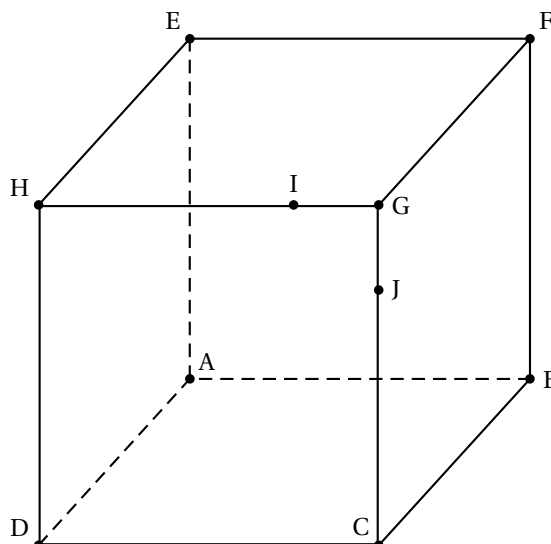
1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - a. Déterminer la forme exponentielle de a .
 - b. Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.
3. Soit M un point d'affixe z du cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.
 - a. Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.
 - b. Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.
4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

EXERCICE 4

3 points

Commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

On définit les points I et J respectivement par $\vec{HI} = \frac{3}{4}\vec{HG}$ et $\vec{JG} = \frac{1}{4}\vec{CG}$.

1. Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment [BF].
2. Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF).
3. Existe-t-il un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral? Justifier votre réponse.

EXERCICE 5

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.

Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.

Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n -ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = 0,8u_n + c.$$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n) .

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.
3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse.
Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.

On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.

On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n .
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

EXERCICE 5

5 points

Candidats avant suivi l'enseignement de spécialité

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers, dans cette population au bout du n -ième jour.

Au début de l'étude la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5 100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.

On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.

En d'autres termes, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9(u_{n+1} - u_n).$$

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5,19$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $V_{n+1} = AV_n$.
On admet alors que, pour tout entier naturel n , $V_n = A^n V_0$.
 - b. On pose $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que la matrice P est inversible.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1} .
En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
 - c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
Pour tout entier naturel n , on admet que

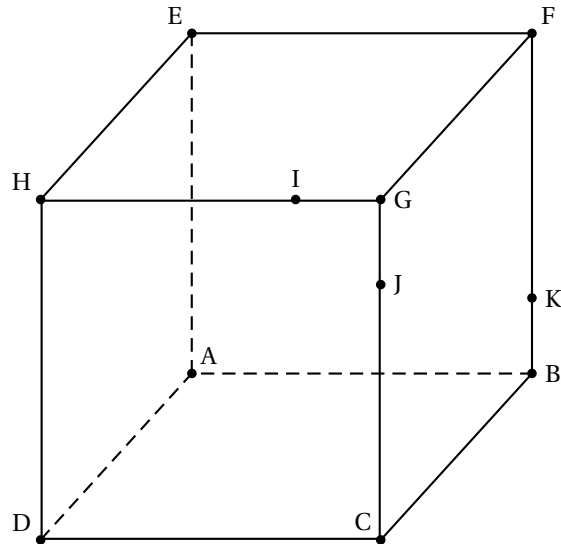
$$A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}.$$

- d. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 6 - 0,9^n$.
3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10^e jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.
4. Calculer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte.

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE de l'exercice 4

Exercice 4, question 1



Exercice 4, question 2

