

**⌘ Baccalauréat S Amérique du Sud ⌘**  
**22 novembre 2016**

A. P. M. E. P.

**EXERCICE 1**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[0; +\infty[$ .

On considère les points  $A(0,5; 1)$  et  $B(0; -1)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On sait que  $O$  appartient à  $\mathcal{C}_f$  et que la droite  $(OA)$  est tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $O$ .

1. On suppose que la fonction  $f$  s'écrit sous la forme  $f(x) = (ax + b)e^{-x^2}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels. Déterminer les valeurs exactes des réels  $a$  et  $b$ , en détaillant la démarche.

**Désormais, on considère que  $f(x) = 2xe^{-x^2}$  pour tout  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$**

2.
  - a. On admettra que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f(x) = \frac{2}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$ .  
Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - b. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
3. La fonction  $g$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_g$  passe par le point  $B(0; -1)$  est une primitive de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .
  - a. Déterminer l'expression de  $g(x)$ .
  - b. Soit  $m$  un réel strictement positif.  
Calculer  $I_m = \int_0^m f(t) dt$  en fonction de  $m$ .
  - c. Déterminer  $\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m$ .
4.
  - a. Justifier que  $f$  est une fonction densité de probabilité sur  $[0; +\infty[$ .
  - b. Soit  $X$  une variable aléatoire continue qui admet la fonction  $f$  comme densité de probabilité. Justifier que, pour tout réel  $x$  de  $[0; +\infty[$ ,  
 $P(X \leq x) = g(x) + 1$ .
  - c. En déduire la valeur exacte du réel  $\alpha$  tel que  $P(X \leq \alpha) = 0,5$ .
  - d. Sans utiliser une valeur approchée de  $\alpha$ , construire dans le repère de l'annexe 1 le point de coordonnées  $(\alpha; 0)$  en laissant apparents les traits de construction.  
Hachurer ensuite la région du plan correspondant à  $P(X \leq \alpha)$ .

**EXERCICE 2**

**3 points**

**Commun à tous les candidats**

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué **un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

**Proposition 1**

L'ensemble des points du plan d'affixe  $z$  tels que  $|z - 4| = |z + 2i|$  est une droite qui passe par le point  $A$  d'affixe  $3i$ .

**Proposition 2**

Soit  $(E)$  l'équation  $(z-1)(z^2 - 8z + 25) = 0$  où  $z$  appartient à l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes.

Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $(E)$  sont les sommets d'un triangle rectangle.

**Proposition 3**

$\frac{\pi}{3}$  est un argument du nombre complexe  $(-\sqrt{3} + i)^8$ .

**EXERCICE 3****3 points****Commun à tous les candidats**

La suite  $(u_n)$  est définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}.$$

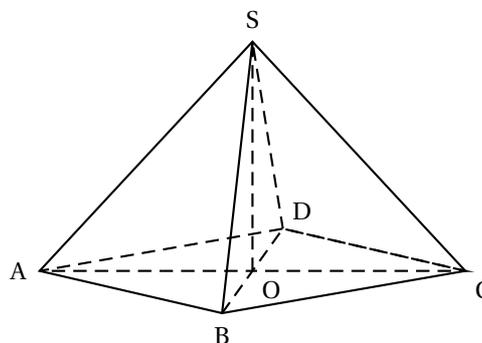
1.
  - a. À l'aide du calcul des premiers termes de la suite  $(u_n)$ , conjecturer la forme explicite de  $u_n$  en fonction de  $n$ . Démontrer cette conjecture.
  - b. En déduire la valeur de la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$ .
2. Compléter, dans l'annexe 2, l'algorithme permettant de déterminer la valeur du plus petit entier  $n$  tel que  $|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-3}$ .

**EXERCICE 4****4 points****Commun à tous les candidats****Partie A : un calcul de volume sans repère**

On considère une pyramide équilatère  $SABCD$  (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.

Les diagonales du carré  $ABCD$  mesurent 24 cm. On note  $O$  le centre du carré  $ABCD$ .

On admettra que  $OS = OA$ .



1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite  $(SO)$  est orthogonale au plan  $(ABC)$ .
2. En déduire le volume, en  $\text{cm}^3$ , de la pyramide  $SABCD$ .

**Partie B : dans un repère**

On considère le repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS})$ .

1. On note  $P$  et  $Q$  les milieux respectifs des segments  $[AS]$  et  $[BS]$ .
  - a. Justifier que  $\vec{n}(1; 1; -3)$  est un vecteur normal au plan  $(PQC)$ .
  - b. En déduire une équation cartésienne du plan  $(PQC)$ .
2. Soit  $H$  le point du plan  $(PQC)$  tel que la droite  $(SH)$  est orthogonale au plan  $(PQC)$ .
  - a. Donner une représentation paramétrique de la droite  $(SH)$ .
  - b. Calculer les coordonnées du point  $H$ .

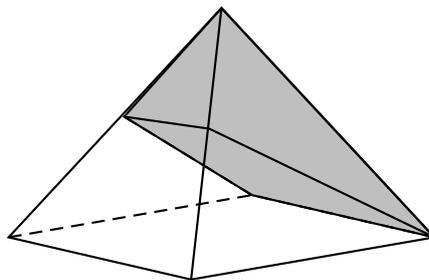
- c. Montrer alors que la longueur SH, en unité de longueur, est  $\frac{2\sqrt{11}}{11}$ .
3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à  $\frac{3\sqrt{11}}{8}$ .  
Calculer le volume de la pyramide SPQCD, en unité de volume.

### Partie C : partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.

Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :

« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables. Est-ce le cas ? Justifier la réponse.

### EXERCICE 5

5 points

#### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à  $10^{-4}$

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique.

Si un module subit une panne, il est changé.

#### Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire  $D$  qui suit une loi normale d'espérance  $\mu = 50$  et d'écart-type  $\sigma$  :

- Déterminer l'arrondi à  $10^{-4}$  de  $\sigma$  sachant que le service statistique indique que  $P(D \geq 48) = 0,7977$ .

Pour la suite de cet exercice, on prendra  $\sigma = 2,4$ .

- Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois.
- Déterminer la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois.

#### Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire  $T$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

- Déterminer la valeur exacte de  $\lambda$ , sachant que le service statistique indique que  $P(0 \leq T \leq 24) = 0,03$ .

Pour la suite de cet exercice, on prendra  $\lambda = 0,00127$ .

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.
3.
  - a. Démontrer que, pour tous réels  $t$  et  $h$  positifs, on a :  
 $P_{T \geq t}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$ , c'est-à-dire que la variable aléatoire  $T$  est sans vieillissement.
  - b. Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

### Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements  $(D \geq 48)$  et  $(T \geq 48)$  sont indépendants. Déterminer la probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois.

### Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.

Ce bilan doit-il remettre en cause le résultat donné par le service statistique de l'enseigne, à savoir que  $P(D \geq 48) = 0,7977$ ? Justifier la réponse.

### EXERCICE 5

5 points

#### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel  $p$  non nul, on note  $N_p$  le rep-unit s'écrivant avec  $p$  fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\dots 1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre 1}}} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice,  $p$  désigne un entier naturel non nul.

L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

#### Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que  $N_p$  n'est divisible ni par 2 ni par 5.
2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de  $N_p$  par 3.
  - a. Prouver que, pour tout entier naturel  $j$ ,  $10^j \equiv 1 \pmod{3}$ .
  - b. En déduire que  $N_p \equiv p \pmod{3}$ .
  - c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit  $N_p$  soit divisible par 3.
3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de  $N_p$  par 7.
  - a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où  $a$  est l'unique entier relatif appartenant à  $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$  tel que  $10^m \equiv a \pmod{7}$ .

On ne demande pas de justification.

$m$	0	1	2	3	4	5	6
$a$							

- b. Soit  $p$  un entier naturel non nul.  
 Montrer que  $10^p \equiv 1 \pmod{7}$  si et seulement si  $p$  est un multiple de 6.  
 On pourra utiliser la division euclidienne de  $p$  par 6.

- c. Justifier que, pour tout entier naturel  $p$  non nul,  $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$ .
- d. Démontrer que « 7 divise  $N_p$  » est équivalent à « 7 divise  $9N_p$  ».
- e. En déduire que  $N_p$  est divisible par 7 si et seulement si  $p$  est un multiple de 6.

**Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait**

1. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On suppose que l'écriture décimale de  $n^2$  se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire  $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$ .

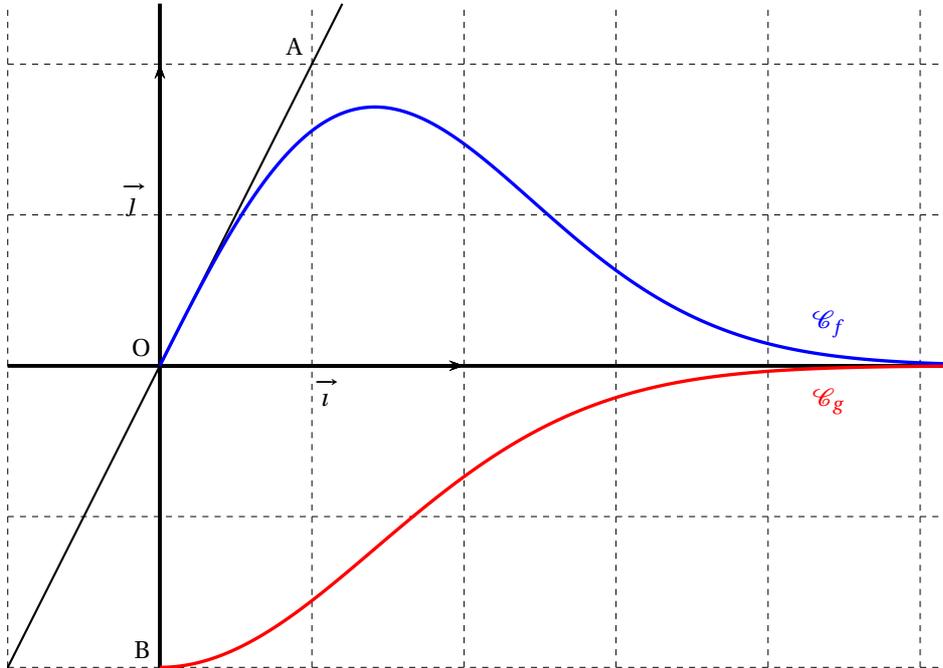
- a. Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \dots \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \dots \pmod{10}$										

- b. En déduire qu'il existe un entier naturel  $m$  tel que :  $n = 10m + 1$  ou  $n = 10m - 1$ .
- c. Conclure que  $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$ .
2. Soit  $p$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.  
Quel est le reste de la division euclidienne de  $N_p$  par 20 ?
3. En déduire que, pour  $p$  entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit  $N_p$  n'est pas le carré d'un entier.

## ANNEXES (à compléter et à remettre avec la copie)

## Annexe 1 (Exercice 1) :



## Annexe 2 (Exercice 3) :

<b>Variables :</b>	$n, a$ et $b$ sont des nombres.
<b>Initialisation :</b>	$n$ prend la valeur 0 $a$ prend la valeur 0 $b$ prend la valeur 0,5.
<b>Traitement :</b>	Tant que $ b - a  \dots\dots$ $n$ prend la valeur $\dots\dots$ $a$ prend la valeur $\dots\dots$ $b$ prend la valeur $\dots\dots$ Fin Tant que.
<b>Sortie :</b>	Afficher $\dots\dots$