Baccalauréat S (spécialité) Antilles-Guyane
septembre 2016

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

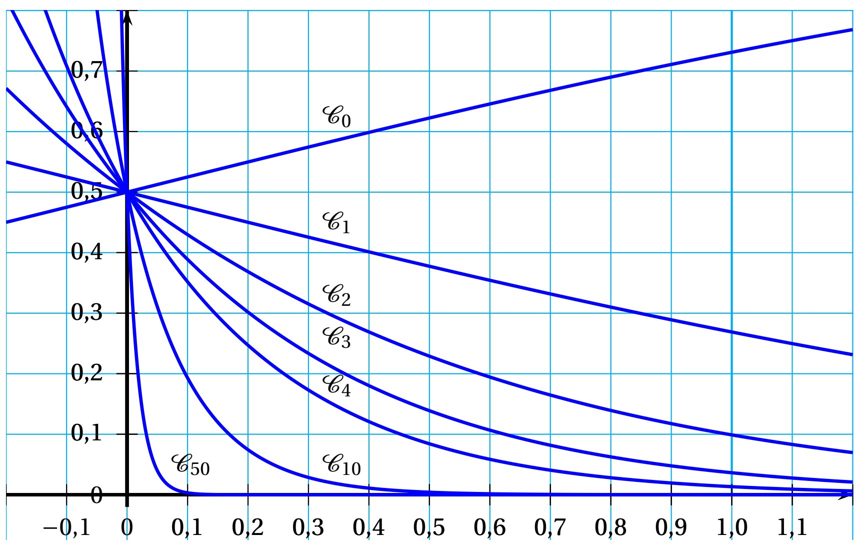
$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{1+\mathrm{e}^{x}}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On a représenté ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_n$ pour différentes valeurs de n.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$



Partie A - Étude graphique

1. Donner une interprétation graphique de u_n.
2. Quelles conjectures peut-on faire concernant les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
3. Proposer, à l'aide du graphique et en expliquant la démarche, un encadrement de u_4 d'amplitude $0,05$.

Partie B - Étude théorique

1. Montrer que $u_0 = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.
2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$ puis en déduire u_1.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $d_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\frac{1-\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$.
   b. Étudier le signe de la fonction d_n sur l'intervalle $[0\,;1]$.

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
   a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

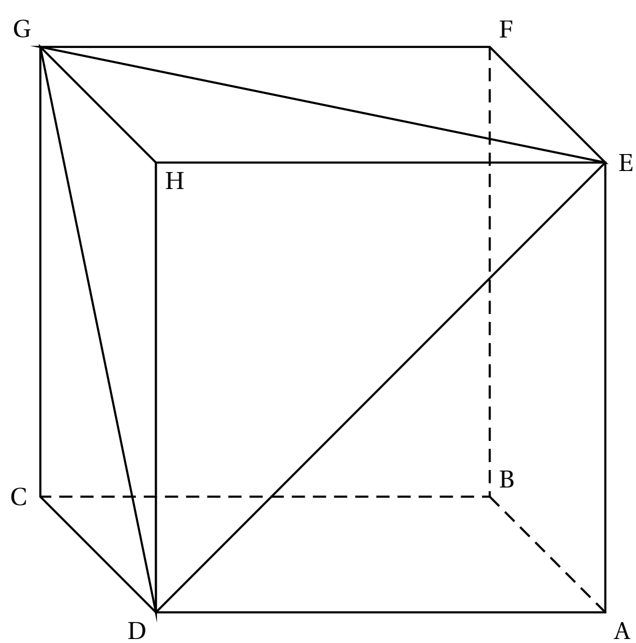
   b. En déduire la valeur de ℓ.
   c. On souhaite construire un algorithme qui affiche la valeur de u_N pour un entier naturel N non nul donné.
   Recopier et compléter les quatre lignes de la partie **Traitement** de l'algorithme suivant.

Entrée :	N est un entier naturel non nul
Variables :	U est un nombre réel
	K est un entier naturel
Initialisation :	Affecter 1 à K
	Affecter $1 - \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$ à U
	Demander à l'utilisateur la valeur de N
Traitement :	Tant que $K < N$
	Affecter .... à U
	Affecter .... à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher U

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{B}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{BA}},\,\overrightarrow{\mathrm{BC}},\,\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).
2. Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).
4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
   Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.
5. Que représente le point P pour le triangle DEG ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z

$$(E): \quad z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0,$$

   où a désigne un nombre réel quelconque.
   - Pour toute valeur de a, (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.
   - Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts.
   - Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.
   - Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.
2. Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0~;~\pi[$ et z le nombre complexe $z = 1 + \text{e}^{\text{i}\theta}$.
   Pour tout réel θ dans l'intervalle $]0~;~\pi[$:
   - Le nombre z est un réel positif.
   - Le nombre z est égal à 1.
   - Un argument de z est θ.
   - Un argument de z est $\dfrac{\theta}{2}$.
3. Soit la fonction f définie et dérivable pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \text{e}^{-x} \sin x.$$

   - La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4}~;~+\infty\right[$.
   - Soit f' la fonction dérivée de f. On a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
   - La fonction f est positive sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   - Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x) = \text{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$.
     La fonction F est une primitive de la fonction f.
4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $0,02$.
   $0,45$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de :
   - $P(X = 30)$
   - $P(X \leqslant 60)$
   - $P(X \leqslant 30)$
   - $P(30 \leqslant X \leqslant 40)$

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité. Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.

On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.
Ainsi $a_0 = 0,4$ et $b_0 = 0,6$.

Partie A

1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe ou d'un arbre pondéré.

2. Déterminer a_1 et b_1.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}0,97 & 0,07\\0,03 & 0,93\end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$.

- **a.** Justifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.
- **b.** Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.
- **c.** Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30}. En donner une interprétation concrète (les coefficients seront arrondis au millième).

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix}0,9 & 0\\0 & 0,9\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0,07\\0,03\end{pmatrix}$.

- **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.
- **b.** Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$X_{n+1} = DX_n + B.$$

2. On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - 10B$.

- **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = DY_n$.
- **b.** On admet que pour tout entier naturel n, $Y_n = D^n Y_0$.
  En déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = D^n (X_0 - 10B) + 10B$.
- **c.** Donner l'expression de D^n puis en déduire a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de n.

3. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?