Math93.com

Baccalauréat 2016 - S Polynésie

Série S Obli. et Spé.
10 juin 2016
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

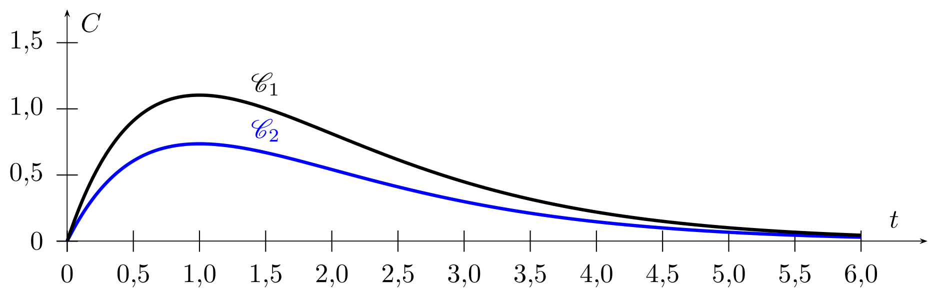
Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Fonctions — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool.
L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool. C est exprimée en gramme par litre et t en heure.
Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. **La fonction C est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$. À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?**
La vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est maximale quand le coefficient directeur de la tangente en un point de la courbe C est maximal. Graphiquement, c'est pour $t = 0$ que cette vitesse est maximale.

2. **Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.**
   - **Premier argument**
   Il est précisé « *qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.* ».
   Or la courbe ayant une tangente en O de pente plus forte étant la courbe $\mathscr{C}_1$, donc la courbe correspondant à la personne la plus corpulente est la courbe $\mathscr{C}_2$.
   - **Deuxième argument**
   Une personne de plus forte corpulence aura logiquement plus de volume de sang et donc une concentration maximale moindre. On retrouve alors la même conclusion.

3. Une personne à jeûn absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = Ate^{-t}$. où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

3. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

$$f : \begin{cases} [0 ; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) = At \times \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall t \in [0 ; +\infty[; f(x) = u(t) \times v(t) \quad : \quad \begin{cases} u(t) = At & ; \quad u'(t) = A \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} & ; \quad v'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0 ; +\infty[, \quad f'(x) &= u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t) \\ f'(x) &= A \times \mathrm{e}^{-t} + At \times \left(-\mathrm{e}^{-t}\right) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall t \in [0 ; +\infty[; f'(t) = A(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}}$$

On a alors :

$$\boxed{f'(0) = a}$$

3. b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
« À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »
On a montré lors de la question **(A.2.)** que la courbe ayant une tangente en O de pente plus faible était correspondait à la personne la plus corpulente.
Or la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est $f'(0) = A$. Donc l'affirmation est fausse, à quantité d'alcool absorbée égale, plus $A = f'(0)$ est petit, plus la personne est corpulente.

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(t) = 2te^{-t}$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

$$f : \begin{cases} [0 ; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

On va appliquer le résultat de la question **(A.3.a)** avec $A = 2$. On a alors directement la dérivée de f.

$$\forall t \in [0 ; +\infty[; f'(t) = 2(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la dérivée est du signe du facteur $2(1-t)$ donc de $(1-t)$. On a alors directement :

$$\left. \begin{array}{|l} f'(t) > 0 \iff 0 \leq t < 1 \\ f'(t) = 0 \iff t = 1 \end{array} \right\} \implies f'(x) < 0 \iff t > 1$$

La fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang est-elle max. ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

On a :

$$f(0) = 0\ ;\ f(1) = 2\,\mathrm{e}^{-1}$$

Et on vient de montrer que :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	

La concentration d'alcool dans le sang est maximale pour $t = 1$ heure et sa valeur est

$$\boxed{f(1) = 2\,\mathrm{e}^{-1} \approx 0,74\ \mathrm{g.L}^{-1}}$$

3. Rappeler la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$. Interpréter le résultat.

On rappelle que :

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- $(1)\ :\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$
- $(2)\ :\ \displaystyle\lim_{t\to-\infty} t\,\mathrm{e}^t = 0$
- $(3)\ :\ \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} = 1$

$$f : \begin{cases} [0\ ;\ +\infty[& \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad t & \longmapsto \quad f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

Or d'après les propriétés de la fonction exponentielle on a pour tout réel t de $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t} = 2 \times \frac{t}{\mathrm{e}^t}$$

Et pour tout réel t de $]0\ ;\ +\infty[$ (on exclut le cas $t = 0$ ce qui n'a pas d'incidence pour la limite en $+\infty$) :

$$f(t) = 2 \times \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^t}{t}}$$

De ce fait, d'après la relation (1) de la propriété 1, et par opération (inverse) sur les limites on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty \Longrightarrow \boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} 2 \times \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^t}{t}} = 0}$$

Cela signifie qu'au bout d'un très grand nombre d'heures, la concentration d'alcool dans le sang est quasi nulle, l'alcool a presque disparu de l'organisme.

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2$ g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

4. a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que : $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.

D'après les résultats des question précédentes on a maintenant :

t	0		t_1		1		t_2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$			0			$-$	
f	0	$\nearrow$	0.2	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-1} \approx 0.74$	$\searrow$	0.2	$\searrow$	0

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).

Application du corollaire sur $[0\ ;\ 1]$:

- La fonction f est *continue* et *strictement croissante* sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$;
- L'image par f de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ est $[f(0)\ ;\ f(1)]$ d'après le tableau de variations.
- On a :

$$f(0) = 0 < 0,2 < f(1) \approx 0,74$$

Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $f(t) = 0,2$ admet une solution unique t_1 sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Application du corollaire sur $[1\ ;\ +\infty[$:

- La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$;
- L'image par f de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ est $]0\ ;\ f(1)]$ d'après le tableau de variations.
- On a :

$$0 < 0,2 < f(1) \approx 0,74$$

Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $f(t) = 0,2$ admet une solution unique t_2 sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

Conclusion : il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que : $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.

4. b. Quelle durée min. Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant ? Donner le résultat arrondi à la minute.

Sur $[t_1\ ;\ t_2]$ on a $f(t) \geq 0,2$ d'après le tableau de variations.
La durée minimale que Paul doit attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité est donc t_2.

Valeur approchée.
Pour avoir un encadrement de t_2, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.

$$\text{Avec un pas de } \Delta = 0.01 \text{ on obtient : } \left\{\begin{array}{lll} f(3,578) & \approx & 0,1999 < 0,2 \\ f(3,577) & \approx & 0,20002 > 0,2 \end{array}\right| , \text{ donc } 3,577 < t_2 < 3,578.$$

Une valeur approchée de t_2 à 0.01 près est donc $t_2 \approx 3,577$.
Paul doit donc attendre 3,577 heure soit arrondi à la minute :

$$\boxed{3\text{ h} + 0,577 \times 60\text{ min} \approx 3\text{ h }35\text{ min}}$$

 ©ISSN 2272-5318

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} g.L^{-1}.

5. a. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

- La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$;
- L'image par f de l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ est $]0\,;\,f(1)]$ d'après le tableau de variations.
- On a :

$$0 < 5 \times 10^{-3} < f(1) \approx 0,74$$

Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*,
l'équation $f(t) = 5 \times 10^{-3}$ admet une solution unique T sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
On a donc :

t	0		1		T		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-1} \approx 0.74$	$\searrow$	5×10^{-3}	$\searrow$	0

De ce fait sur l'intervalle $[T\,;\,+\infty[$, la fonction f y étant décroissante, son maximum est $f(T) = 5 \times 10^{-3}$. On vient de montrer qu'à partir de cet instant T, la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

5. b. On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}$.

```
Initialisation :   t prend la valeur 3,5
                   p prend la valeur 0,25
                   C prend la valeur 0,21
Traitement :       Tant que C > 5 × 10^-3 faire :
                      | t prend la valeur t + p
                      | C prend la valeur f(t)
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher t
```

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme. Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Etape 1	Etape 2
p	$0,25$	$0,25$	$0,25$
t	$3,5$	$3,75$	4
C	$0,21$	$0,18$	$0,15$

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?
L'algorithme affiche le temps, après l'ingestion d'alcool, à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable (au quart d'heure près).

Exercice 2. Suites (EPI) 3 points

Commun à tous les candidats

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$ et v définie par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

- En C2 on a écrit : $\boxed{= B2 + 2 * A2 \wedge 2 + 3 * A2 + 5}$;
- En B3 on a écrit : $\boxed{= 2 * B2 + 2 * A2 \wedge 2 - A2}$.

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

L'idée ici est d'émettre une conjecture concernant l'expression d'une des deux suites à l'aide des premières valeurs puis de la démontrer, l'autre s'en déduira alors facilement.
Difficile de trouver une expression simple pour u par contre il semble que la suite v soit géométrique, de premier terme 7 et de raison 2.

Méthode 1 : Démonstration directe.
On rappelle que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n \\ v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5 \end{cases}$$

Pour tout entier n en a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \underbrace{u_{n+1}}_{2u_n+2n^2-n} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 \\
v_{n+1} &= 2u_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 5 \\
v_{n+1} &= 2u_n + 4n^2 + 6n + 10 \\
v_{n+1} &= 2 \times \underbrace{\left(u_n + 2n^2 + 3n + 5\right)}_{v_n} \\
v_{n+1} &= 2 \times v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + 5 = 7$, donc pour tout entier n

$$\boxed{v_n = 7 \times 2^n}$$

On en déduit alors l'expression de u_n, pour tout entier n :

$$\boxed{u_n = u_n = v_n - (2n^2 + 3n + 5) = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5}$$

Méthode 2 : Démonstration par récurrence.
On rappelle que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n \\ v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n \\ u_n = v_n - (2n^2 + 3n + 5) \end{cases}$$

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat

$$(P_n) \ : \ v_n = 7 \times 2^n$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :

$$v_0 = u_0 + 5 = 7 \quad \text{et} \quad 7 \times 2^0 = 7$$

- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5$$

Et puisque $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$ on a :

$$v_{n+1} = \left(2u_n + 2n^2 - n\right) + 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 5$$
$$v_{n+1} = 2u_n + 4n^2 + 6n + 10$$

On applique alors la relation $u_n = v_n - (2n^2 + 3n + 5)$ avec l'hypothèse de récurrence $v_n = 7 \times 2^n$

$$v_{n+1} = 2 \times \left(7 \times 2^n - (2n^2 + 3n + 5)\right) + 4n^2 + 6n + 10$$
$$v_{n+1} = 7 \times 2^{n+1} \underbrace{-4n^2 - 6n - 10 + 4n^2 + 6n + 10}_{0}$$

On a alors montré que $v_{n+1} = 7 \times 2^{n+1}$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.

- **Conclusion**
  On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{v_n = 7 \times 2^n}$$

On a alors de suite pour tout entier n

$$\boxed{u_n = u_n = v_n - (2n^2 + 3n + 5) = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5}$$

©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Probabilités 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$. Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015. L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ $0,451$.

La variable aléatoire T qui modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Propriété 2

Soit λ un réel strictement positif.
Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors pour tout réel a et b tels que $0 \leq a \leq b$:

$$P(a \leq T \leq b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$$

et donc

$$P(T \leq b) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad P(T \geq a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$$

Lorsque le groupe voit une étoile filante, la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante est donc avec $\lambda = 0,2$:

$$\boxed{P(T < 3) = 1 - \mathrm{e}^{-3\lambda} = 1 - \mathrm{e}^{-0,6} \approx \underline{0,451}}$$

2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à $0,95$? Arrondir ce temps à la minute près.

On cherche le plus petit entier t tel que :

$$\begin{aligned} P(T \leq t) > 0,95 &\Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-0,2t} > 0,95 \\ &\Longleftrightarrow -\mathrm{e}^{-0,2t} > -0,05 \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-0,2t} < 0,05 \end{aligned}$$

On compose par ln fonction ln strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} P(T \leq t) > 0,95 &\Leftrightarrow -0,2t < \ln 0,05 \\ &\Leftrightarrow t > \frac{\ln 0,05}{-0,2} \approx 14,979 \end{aligned}$$

Or t étant exprimé en minute et le résultat arrondi à la minute près, lorsque le groupe voit une étoile filante, la durée minimale qu'il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à $0,95$ est de <u>15 minutes</u>.

3. Il a prévu une sortie de 2 heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Puisque la variable aléatoire T qui modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, suit une loi exponentielle de paramètre λ. , le temps moyen d'attente entre deux étoiles filantes est :

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = 5 \text{ min}$$

En 2h soit 120 minutes, il peut donc espérer voir en moyenne $120 \div 5 =$ <u>24 étoiles filantes</u>

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes : 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ; 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel et 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope est $0,494$.

On va définir les évènements suivants (et les évènements contraires) :

- N : « la personne est un nouvel adhérent »
- T : « la personne possède un télescope personnel »

On a donc d'après les données de l'exercice :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents donc :

$$p(N) = 0,64 \text{ et } p\left(\overline{N}\right) = 0,36$$

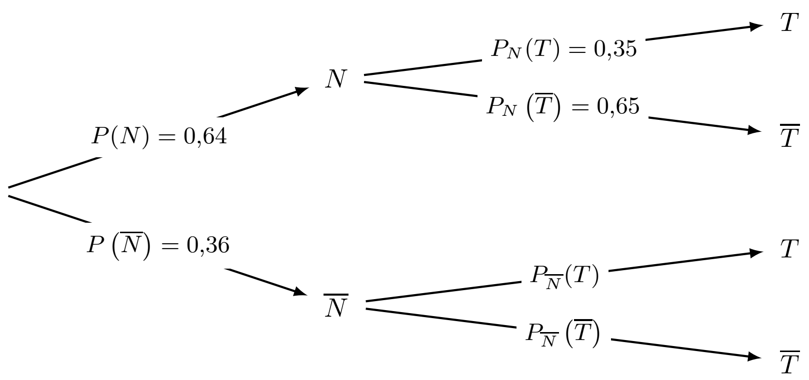
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel donc :

$$p\left(\overline{N} \cap T\right) = 0,27$$

- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel donc :

$$p_N\left(\overline{T}\right) = 0,65 \text{ et } p_N(T) = 0,35$$

Ce que l'on peur résumer dans un arbre :



On choisit un adhérent au hasard. La probabilité que cet adhérent possède un télescope est $p(T)$ et d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(N \cap T) + p\left(\overline{N} \cap T\right) \\ &= p_N(T) \times p(N) + p\left(\overline{N} \cap T\right) \\ &= 0,35 \times 0,64 + 0,27 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(T) = 0,494}$$

2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. La probabilité que ce soit un nouvel adhérent est alors :

$$\boxed{p_T(N) = \frac{p(N \cap T)}{p(T)} = \frac{p_N(T) \times p(N)}{p(T)} = \frac{0,35 \times 0,64}{0,494} \approx \underline{0,453}}$$

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2 500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 *habitants et obtient* 54 *avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne. L' astronome fait l'hypothèse que* 50 % *de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne.*
Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

- **Analyse des données** :
  - Sur un échantillon de $n = 100$ personnes. Il est constaté que 54 d'entre elles sont avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne. Donc la fréquence observée de est

$$f = 54 \div 100 = 0{,}54 \text{ soit } \boxed{f = 0{,}54}$$

  - L' astronome fait l'hypothèse que $p = 50\,\%$ de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne
- **Intervalle de fluctuation** :

Théorème 2 (Intervalle de fluctuation asymptotique)

Si les conditions suivantes sont remplies : $\begin{cases} \checkmark & n \geq 30 \\ \checkmark & np \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) \geq 5 \end{cases}$

Alors un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% de la fréquence F_n d'un caractère dans un échantillon de taille n est si p désigne la proportion de ce caractère dans la population :

$$I_n = \left[p - 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\,\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a pour le cas étudié, $n = 100$, $p = 50$ %. Vérifions les conditions d'application du théorème :

$$\begin{cases} \checkmark & n = 100 \geq 30 \\ \checkmark & np = 100 \times 0{,}5 = 50 \geq 5 \\ \checkmark & n(1-p) = 100 \times 0{,}5 = 50 \geq 5 \end{cases}$$

Un intervalle fluctuation asymptotique au seuil de confiance de 95% est alors :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}5 - 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{100}}\ ;\ 0{,}5 + 1,96\,\frac{\sqrt{0{,}5 \times 0{,}5}}{\sqrt{100}}\right]$$

Soit puisque les borne sont :

- $p - 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}402$. On arrondit la borne inférieure par défaut à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}402}$.
- $p + 1,96\,\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}598$. On arrondit la borne supérieure par excès à 10^{-3} près soit $\underline{0{,}598}$.

$$\boxed{I_{100} \approx \left[0{,}402\ ;\ 0{,}598\right]}$$

- **Conclusion**
  La fréquence observée appartient à l'intervalle, $f = 0{,}54 \in I_100$ donc le résultat de ce sondage ne le fera donc pas changer d'avis.

Exercice 4. Obligatoire 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Proposition 1 (Vraie)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{2} + 3\mathrm{i}$, , $z_{\mathrm{B}} = 1 + \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}} = -4\mathrm{i}$ ne sont pas alignés.

Preuve.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est d'affixe

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1 + \mathrm{i} - \sqrt{2} - 3\,\mathrm{i} = \left(1 - \sqrt{2}\right) - 2\,\mathrm{i}$$

- Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est d'affixe

$$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -4\,\mathrm{i} - \sqrt{2} - 3\,\mathrm{i} = -\sqrt{2} - 7\,\mathrm{i}$$

Or

$$\frac{-7}{-2} \neq \frac{-\sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})}$$

Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et les points A, B et C ne sont pas alignés. La proposition 1 est donc vraie.

Proposition 2 (Fausse)

Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $[\mathrm{i}(1 + \mathrm{i})]^{2n}$ soit un réel strictement positif.

Preuve.

- **Méthode 1**.
  On a :

$$\mathrm{i}\,(1 + \mathrm{i}\,) = -1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3\,\mathrm{i}\,\pi}{4}}$$

De ce fait pour n entier naturel non nul :

$$[\,\mathrm{i}\,(1 + \mathrm{i}\,)]^{2n} = \left(\sqrt{2}\right)^{2n}\left(\mathrm{e}^{\frac{3\,\mathrm{i}\,\pi}{4}}\right)^{2n} = \left(\sqrt{2}\right)^{2n}\mathrm{e}^{\frac{2n \times 3\,\mathrm{i}\,\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^{2n}\left(\mathrm{e}^{\frac{3\,\mathrm{i}\,\pi}{2}}\right)^{n}$$

Soit

$$\boxed{[\,\mathrm{i}\,(1 + \mathrm{i}\,)]^{2n} = \left(\sqrt{2}\right)^{2n}\left(\mathrm{e}^{\frac{3\,\mathrm{i}\,\pi}{2}}\right)^{n}}$$

Or :

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{3\,\mathrm{i}\,\pi}{2}}\right) = -\,\mathrm{i}$$

Donc pour $n = 4$ on a :

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{3\,\mathrm{i}\,\pi}{2}}\right)^{4} = (-\,\mathrm{i}\,)^4 = 1$$

Et

$$[\,\mathrm{i}\,(1 + \mathrm{i}\,)]^{2\times 4} = \left(\sqrt{2}\right)^{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{3\,\mathrm{i}\,\pi}{2}}\right)^{4} = \left(\sqrt{2}\right)^{8} = 16 \in \mathbb{R}_+$$

Il existe au moins un entier naturel $n = 4$ non nul tel que $[\mathrm{i}(1 + \mathrm{i})]^{2n}$ soit un réel strictement positif. La proposition 2 est donc fausse.

- **Méthode 2** : sans passer par la forme exponentielle. On a :

$$\begin{aligned}\Big(\mathrm{i}\times(1+\mathrm{i})\Big)^{2n} &= \Big(\mathrm{i}^2\times(1+\mathrm{i})^2\Big)^n\\ &= \Big(-1\times(1+2\mathrm{i}-1)\Big)^n\\ &= \Big(-2\mathrm{i}\Big)^n\\ &= 2^n\times(-\mathrm{i})^n\end{aligned}$$

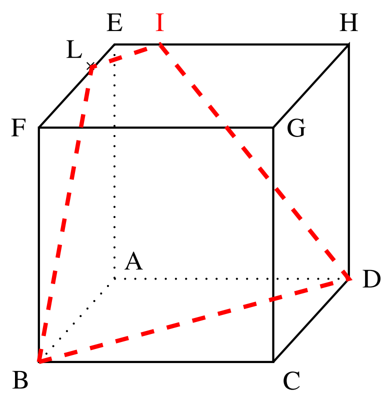
Alors pour $n=4$ on a $(-\mathrm{i})^n=(-\mathrm{i})^4=1$ et

$$\Big(\mathrm{i}\times(1+\mathrm{i})\Big)^{2n}=\Big(\mathrm{i}\times(1+\mathrm{i})\Big)^{2\times4}=2^4\times1=16$$

Il existe au moins un entier naturel $n=4$ non nul tel que $[\mathrm{i}(1+\mathrm{i})]^{2n}$ soit un réel strictement positif. La proposition 2 est donc fausse.

Proposition 3 (Fausse)

ABCDEFGH est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{\mathrm{EL}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{EF}}$.



La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.

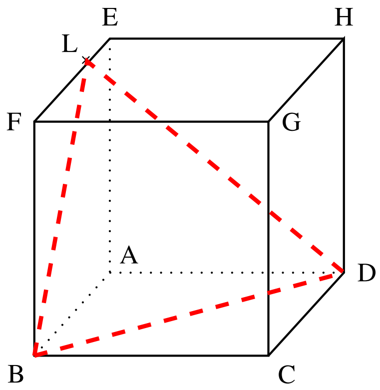
Preuve.

Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles car ce sont les faces supérieures et inférieures du cube. Donc les intersections de ces plans avec le plan (BDL) sont parallèles.

L'intersection du plan (BDL) avec la face (ABCD) est la droite (BD). Cette droite est donc parallèle à l'intersection du plan (BDL) avec la face (EFGH).
C'est une droite passant par le point L et parallèle à la droite (BD), elle coupe le segment [EH] en I.

L'intersection du cube par le plan (BDL) est donc le quadrilatère B, D, I et L.
La proposition 3 est donc fausse.

Proposition 4 (Fausse)



Le triangle DBL est rectangle en B.

Preuve.

- **Méthode 1** : juste avec les vecteurs.
On a d'après les données, $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et donc,

$$\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \quad \text{car ABCDEFGH est un cube}$$

Or :

$$\begin{cases} \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FL} = \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \end{cases}$$

Donc les produits scalaires donnent :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BL} &= \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}\right) \\ &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{BF}$ est normal au plan ABCD donc aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ et ABCD est un carré donc $\overrightarrow{BC}$ orthogonale à $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BL} = \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF}}_{0} + \frac{2}{3}\underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BF}}_{0} + \frac{2}{3}\underbrace{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD}}_{CD^2}$$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\,CD^2 \neq 0$$

Donc le produit scalaire n'est pas nul, le triangle BCD n'est pas rectangle en B et la proposition 4 est fausse.

- **Méthode 2** : on se place dans un repère.
ABCDEFGH étant un cube, on considère le repère orthonormé $\left(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}\right)$.

$$\left\{\begin{array}{l} B\,(0\,;\,0\,;\,0) \\ D\,(1\,;\,1\,;\,0) \\ L\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right) \end{array}\right. \Bigg| \implies \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BL} = \frac{2}{3} \neq 0$$

Donc le produit scalaire n'est pas nul, le triangle BCD n'est pas rectangle en B et la proposition 4 est fausse.

Proposition 5 (Fausse)

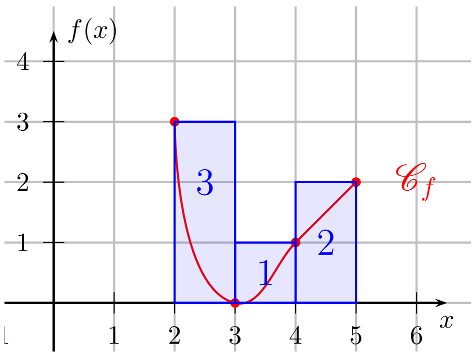
On considère la fonction f définie sur l'intervalle [2 ; 5] et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous :

x	2	3	4	5
Variations de f	3	0	1	2

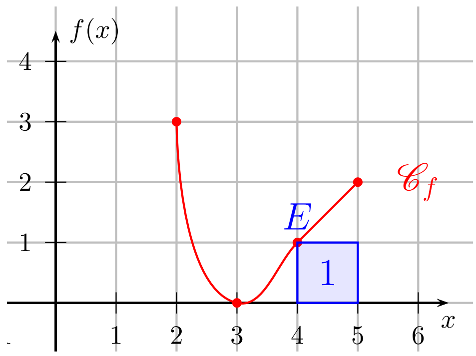
L'intégrale $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre $1,5$ et 6.

Preuve.
La fonction f étant positive, l'intégrale $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond, en unité d'aire, à l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation, $x = 1$ et $x = 5$.

- Cette aire est clairement inférieure à 6 unités d'aire comme on le voit sur l'exemple ci-dessous.



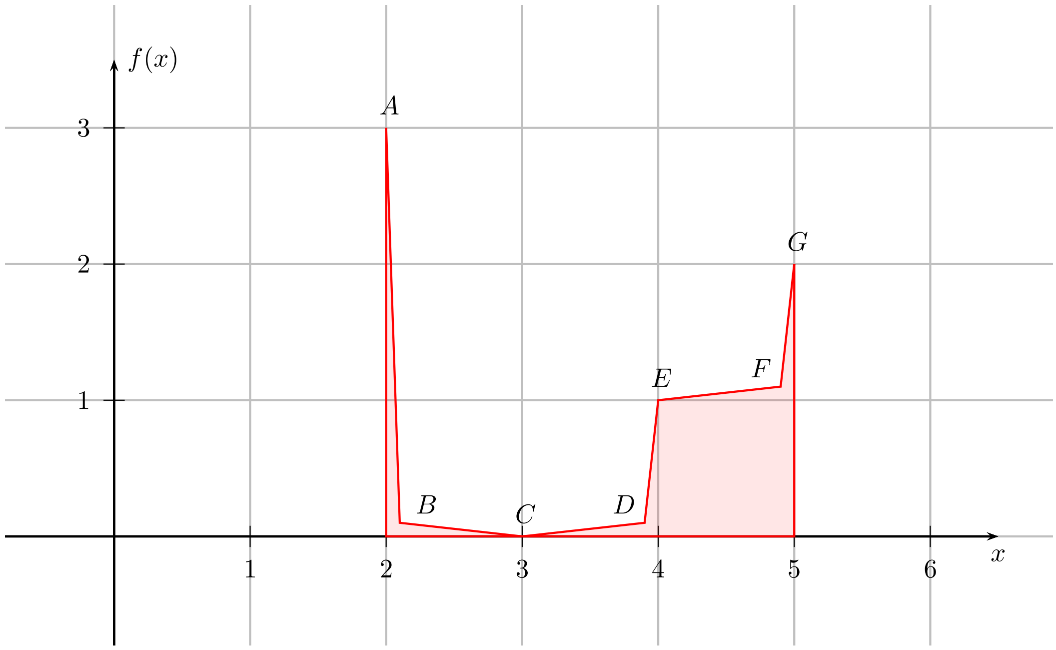
- Cette aire est aussi strictement supérieure à 1 unité d'aire car la courbe passe par le point de coordonnées $E(4\ ;\ 1)$:



La suite est plus complexe, on se demande vraiment le niveau de preuve attendue.
On va chercher à prouver que la proposition est fausse.

L'idée est de trouver un contre-exemple, une fonction telle que l'intégrale considérée soit inférieure à $1,5$ (et supérieure à 1). Le plus simple est de définir une fonction affine par morceaux, par exemple une fonction f dont la courbe représentative est la ligne brisée $ABCDE$ de sommets les points de coordonnées respectives (avec a réel positif tel que $0 < a < 1$) :

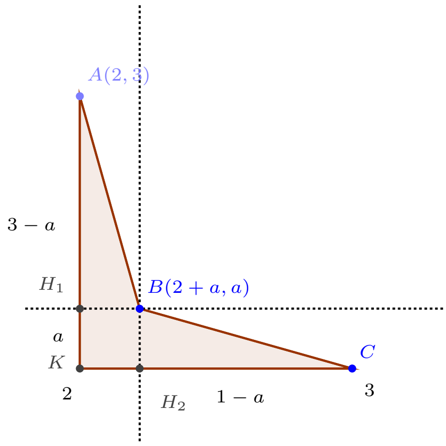
$$A(2,3)\ ;\ B(2+a,a)\ ;\ C(3,0)\ ;\ D(4-a,a)\ ;\ E(4,1)\ ;\ F(5-a,1+a)\ ;\ G(5,2)$$



D'après la relation de Chasles :

$$\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Par exemple pour calculer l'aire sous la ligne brisée ABC on a :



$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{(KH_1BH_2)} + \mathcal{A}_{(AH_1B)} + \mathcal{A}_{(BH_2C)} = a^2 + \frac{AH_1 \times H_1B}{2} + \frac{BH_2 \times H_2C}{2}$$

où h est l'ordonnée de B soit a donc

$$\mathcal{A}_1 = a^2 + \frac{(3-a)\times a}{2} + \frac{(1-a)\times a}{2} = a^2 - \frac{a^2}{2} + \frac{3a}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{a}{2} = 2a$$

Soit

$$\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2a$$

On procède alors de la même façon pour les autres domaines :

$$\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x = a \quad \text{et} \quad \int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = a+1$$

De ce fait

$$\int_2^5 = 2a + a + 1 + a = 4a + 1$$

On peut donc facilement trouver un réel a tel que $1 < 4a+1 < 1,5$ soit

$$1 < 4a+1 < 1,5 \iff \boxed{0 < a < \frac{1}{8} = 0,125}$$

La proposition 5 est fausse.

Exercice 4. Spécialité — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Proposition 1 (Vraie)

Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de n^2+n n'est jamais égal à 4.

Preuve.
On sait que pour tout entier naturel n,

$$10^n \equiv 0 \mod 10$$

De ce fait, le chiffre des unités de tout entier N est égal au reste de la division euclidienne de N par 10 soit à $N \mod 10$. Le plus simple ici est donc de tester les 10 cas possibles :

$n \mod 10$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \mod 10$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$n^2+n \mod 10$	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

Le chiffre des unités n'est jamais égal à 4 donc la proposition 1 est vraie.

Proposition 2 (Vraie)

On considère la suite u définie, pour $n \geqslant 1$, par

$$u_n = \frac{1}{n}\text{pgcd}(20\ ;\ n).$$

La suite (u_n) est convergente.

Preuve.
Pour tout entier naturel n, le PGCD de 20 et de n est un entier compris entre 1 et 20, de ce fait :

$$1 \leq \text{pgcd}(20\ ;\ n) \leq 20 \Longrightarrow \frac{1}{n} \leq u_n = \frac{1}{n}\text{pgcd}(20\ ;\ n) \leq \frac{20}{n}$$

Soit

$$\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{20}{n}$$

On va alors appliquer le théorème d'encadrement des suites convergentes (théorème des gendarmes) :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{20}{n} = 0 \end{array}\right| \underset{\text{Théorème d'encadrement}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

La suite (u_n) est convergente donc la proposition 2 est vraie.

Proposition 3 (Fausse)

Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a $A\times B = B\times A$.

Preuve.
Par exemple avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On a trouvé A et B carrées de dimension 2, telles que $A\times B \neq B\times A$ donc la proposition 3 est fausse.

©ISSN 2272-5318

Un mobile peut occuper deux positions A et B. À chaque étape, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer. Pour tout entier naturel n, on note : A_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position A à l'étape n » et a_n sa probabilité ; B_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position B à l'étape n » et b_n sa probabilité ;
X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. On admet que, pour tout entier nature n, $X_{n+1} = M \times X_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,3 \\ 0,45 & 0,7 \end{pmatrix}$.

Proposition 4 (Vraie)

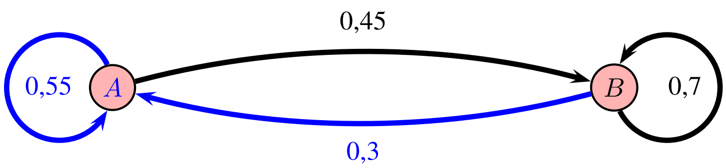
La probabilité $P_{A_n}(B_{n+1})$ vaut 0,45.

Preuve.
On a ici pour tout entier n, et avec

$$X_{n+1} = MX_n \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,3 \\ 0,45 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Par définition de la matrice de transition, elle est associée au graphe probabiliste ci-dessous et

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = M_{(2,1)} = 0,45$$



La proposition 4 est vraie.

Proposition 5 (Fausse)

Il existe un état initial $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1, autrement dit tel que $b_1 = 3a_1$.

Preuve.
On a

$$\begin{aligned} X_1 = MX_0 &\iff \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,3 \\ 0,45 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55a_0 + 0,3b_0 \\ 0,45a_0 + 0,7b_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On cherche donc $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{aligned} b_1 = 3a_1 &\iff \begin{cases} 0,45a_0 + 0,7b_0 = 3 \times (0,55a_0 + 0,3b_0) \\ a_0 + b_0 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0,45a_0 + 0,7(1 - a_0) = 3 \times (0,55a_0 + 0,3(1 - a_0)) \\ a_0 + b_0 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -0,25a_0 + 0,7 = 0,75a_0 + 0,9 \\ a_0 + b_0 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_0 = -0,2 \\ a_0 + b_0 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme a_0 doit être un réel positif, on ne peut pas trouver d'état initial tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1. La proposition 5 est fausse.

- Fin du devoir -