Exercice 1 — 6 points

Commun a tous les candidats

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

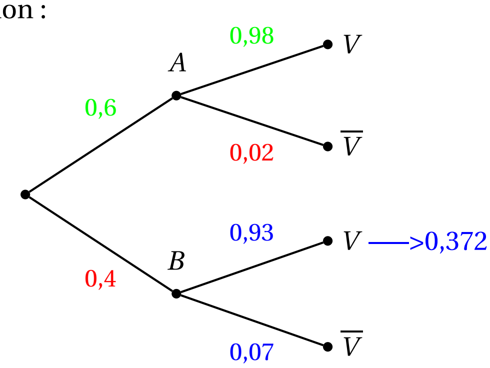
Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

Solution: On peut construire un arbre pour illustrer la situation :



D'après l'énoncé on a $P(V) = 0{,}96$
$P(A) = 0{,}6$ et $P_A(V) = 0{,}98$
Puis on complète une partie de l'arbre
les données en bleu sont acquises après la question 2

On cherche $P(A \cap V)$
$P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0{,}588$

2. Justifier que $P(B \cap V) = 0{,}372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

Solution: A et B forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales
donc on a $P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V) = 0{,}96$
On en déduit que $P(B \cap V) = 0{,}96 - P(A \cap V) = 0{,}372$

3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.
A-t-il raison ?

Solution: On cherche $P_{\overline{V}}(B)$

$P_{\overline{V}}(B) = \dfrac{P\left(B \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \dfrac{0{,}028}{1 - 0{,}96} = 0{,}7$. Donc le technicien a raison

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}055$.

Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.

Solution: On cherche $P(0{,}9 \leqslant X \leqslant 1{,}1) \approx 0{,}93$. Cette valeur correspond bien à $P_B(V)$

2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif.

Sachant que $P(0{,}9 \leqslant Y \leqslant 1{,}1) = 0{,}98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ'.

Solution: $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(1\,;\,\sigma'^2\right) \Longrightarrow \dfrac{Y-1}{\sigma'} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0\,;\,1^2\right)$

Soit $Z = \dfrac{Y-1}{\sigma'}$ alors $0{,}9 \leqslant Y \leqslant 1{,}1 \Longleftrightarrow -\dfrac{0{,}1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0{,}1}{\sigma'}$

$P(0{,}9 \leqslant Y \leqslant 1{,}1) = 0{,}98 \Longleftrightarrow P\left(-\dfrac{0{,}1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0{,}1}{\sigma'}\right) = 0{,}98 \Longleftrightarrow P\left(Z \leqslant \dfrac{0{,}1}{\sigma'}\right) = 0{,}99$

d'après la calculatrice on trouve $\dfrac{0{,}1}{\sigma'} \approx 2{,}326$. On en déduit que $\sigma' \approx 0{,}043$

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

a. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Solution: La probabilité qu'une bille tirée au hasard dans la production journalière est $p = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ car les 5 couleurs sont équiprobables.

On répète 40 fois de manières indépendantes une expérience n'ayant que deux issues : bille noire ou non dont la probabilité du succès est $p = 0{,}2$.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de billes noires dans le sac alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(40\,;\,0{,}2)$

On cherche $P(X = 10) = \dbinom{40}{10} \times 0{,}2^{10} \times 0{,}8^{30} \approx 0{,}107$

b. Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

Solution: On cherche si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%

On se trouve bien dans les conditions d'application puisque $n = 40 \geqslant 30$

$np = 8 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 32 \geqslant 5$

L'intervalle de fluctuation asymptotique seuil de 95% est

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}2 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}16}}{\sqrt{40}} ; 0{,}2 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}25}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0{,}076\ ;\ 0{,}324]$$

La fréquence observée de lancers à droite est $f = \dfrac{12}{40} = 0{,}3 \in I$

il n'y a donc pas de raison de douter du réglage de la machine qui teinte les billes .

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

Solution: Pour un sac contenant n billes, la probabilité qu'au moins une soit noire est

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0{,}2^0 \times 0{,}8^n = 1 - 0{,}8^n$$

On doit donc résoudre $1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}8^n \leqslant 0{,}01 \leqslant n\ln(0{,}8) \leqslant \ln(0{,}01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$

or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx 20{,}6$

L'entreprise doit donc mettre au minimum 21 billes dans chaque sac pour atteindre l'objectif .

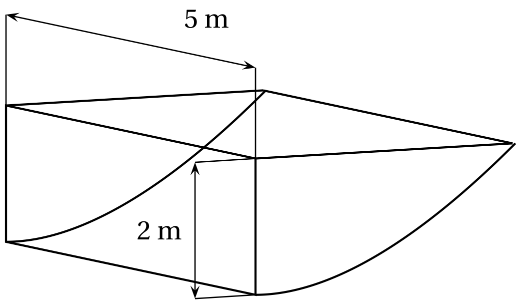
EXERCICE 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau. Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

Cette cuve est schématisée ci-contre.

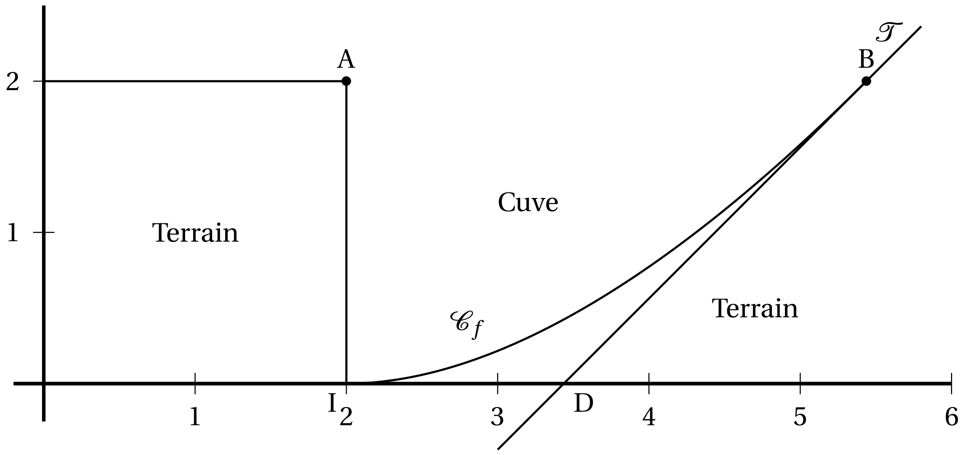


La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 2\text{e}]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

> **Solution:** $f(x_B) = f(2\text{e}) = 2\text{e} \times \ln\left(\dfrac{2\text{e}}{2}\right) - 2\text{e} + 2 = 2\text{e} - 2\text{e} + 2 = 2 = y_B$ donc $B \in \mathscr{C}_f$
>
> $f(x_I) = f(2) = 2 \times \ln\left(\dfrac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0 = y_I$ donc $I \in \mathscr{C}_f$
>
> f est dérivable sur $[2\,;\,2\text{e}]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[2\,;\,2\text{e}]$
>
> $f = uv - u + 2 \Longrightarrow f' = u'v + uv' - u'$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$
>
> $\forall x \in [2\,;\,2\text{e}]$, $f'(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et on a $f'(2) = 0$ donc la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale en I
>
> l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I

2. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses.

a. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ et en déduire les coordonnées de D.

> **Solution:** $\mathscr{T}\ :\ y = f'(2\text{e})(x - 2\text{e}) + f(2\text{e})$ or $f'(2\text{e}) = 1$ et $f(2\text{e}) = 2$
>
> On a donc $\mathscr{T}\ :\ y = x + 2 - 2\text{e}$ et on en déduit $D(2\text{e} - 2\,;\,0)$

b. On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2, x = 2$ et $x = 2\text{e}$.
S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

> **Solution:** $\mathscr{A}_{ABI} = \dfrac{1}{2} \times AB \times AI = (2\text{e} - 2)m^2$
>
> $\mathscr{A}_{AIDB} = \dfrac{(AB + ID) \times AI}{2} = (4\text{e} - 6)m^2$
>
> La longueur de la cuve étant de 5 m, on en déduit $10\text{e} - 10 \leqslant V \leqslant 20\text{e} - 30$
>
> Autrement dit le volume de la cuve est compris entre 17,183 m^3 et 24,366 m^3

3. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[2\,;\,2\mathrm{e}]$, la fonction G définie par

$$G(x)=\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x)=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

Solution: G est dérivable sur $[2\,;\,2\mathrm{e}]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[2\,;\,2\mathrm{e}]$

$G=uv-\frac{1}{2}u\Longrightarrow f'=u'v+uv'-\frac{1}{2}u'$ avec $\begin{cases}u(x)=\frac{x^2}{2}\\ v(x)=\ln\left(\frac{x}{2}\right)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}u'(x)=x\\ v'(x)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{x}\end{cases}$

$\forall x\in[2\,;\,2\mathrm{e}]$, $G'(x)=\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x=g(x)$

Donc G est bien une primitive de la fonction g sur $[2\,;\,2\mathrm{e}]$

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,2\mathrm{e}]$.

Solution: $f(x)=g(x)-x+2$

donc $F(x)=G(x)-\frac{x^2}{2}+2x=\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{3x^2}{4}+2x$ est primitive de f sur $[2\,;\,2\mathrm{e}]$

c. Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Solution: $S=\int_2^{2\mathrm{e}}(2-f(x))\,dx=\Big[2x-F(x)\Big]_2^{2\mathrm{e}}=(4(\mathrm{e})F(2\mathrm{e}))-(4-F(2))=(\mathrm{e}^2)-(3)=\mathrm{e}^2-3$

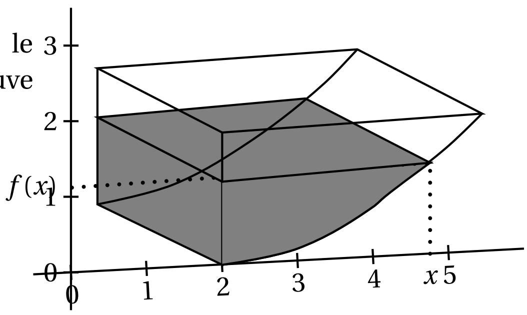
$V=5S\approx 22m^3$

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2\mathrm{e}$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;\,2\mathrm{e}]$,

$$v(x)=5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-2x\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}+2x-3\right].$$



1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

Solution: on cherche x_0 tel que $f(x_0)=1$

On sait qu'il existe un unique x_0 vérifiant cette équation car f est continue et strictement croissante sur $[\,;\,2\mathrm{e}]$ à valeurs dans $[0\,;\,1]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, x_0 existe et est unique.

Par balayage on a $x_0\approx 4{,}311$

$v(4{,}311)\approx 7m^3$

2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.
Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

```
Variables :    a est un réel
               b est un réel
Traitement :   a prend la valeur 2
               b prend la valeur 2 e
               Tant que v(b) − v(a) > 10^−3 faire :
                   c prend la valeur (a + b)/2
                   Si v(c) < V/2, alors :
                       a prend la valeur c
                   Sinon
                       b prend la valeur c
                   Fin Si
               Fin Tant que
Sortie :       Afficher f(c)
```

Solution:
L'algorithme permet d'afficher la hauteur d'eau dans la cuve correspondant à $10^{-3}m^3$ près à un remplissage à moitié de la capacité totale.

EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4i et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+\text{i})^n$.

1. Écrire le nombre $1+\text{i}$ sous forme exponentielle.

Solution: $1+\text{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\text{e}^{i\frac{\pi}{4}}$

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

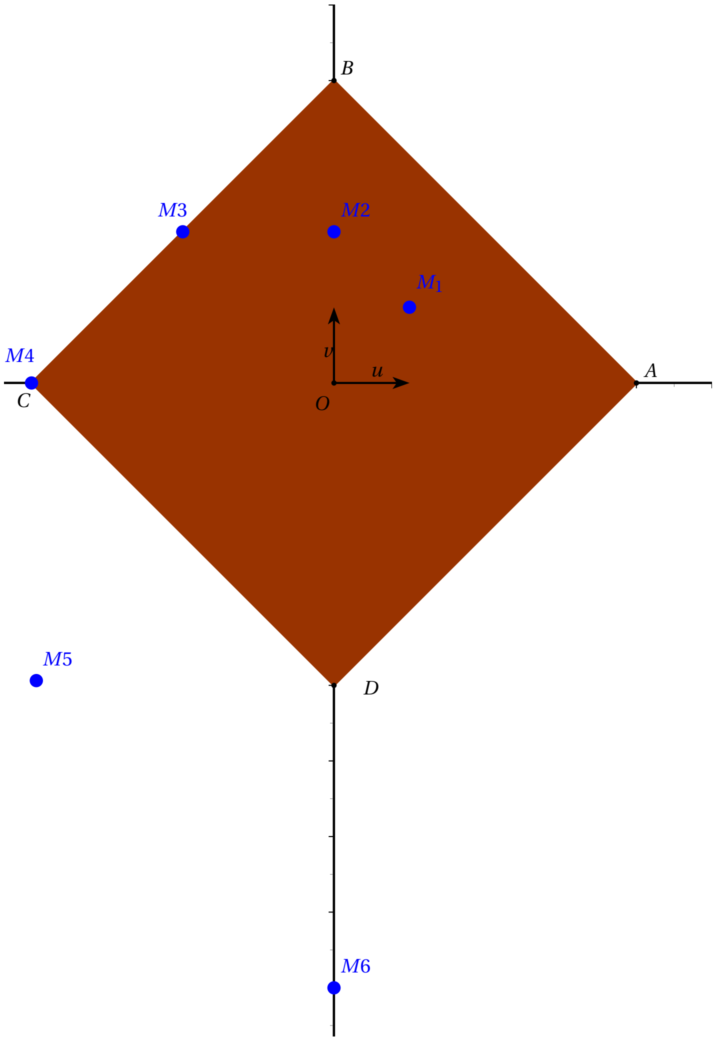
Solution:

La distance maximale entre O et les côtés du cube est 4.
Un point M_n sort du cube si $OM_n > 4$

or $OM_n = |z_n| = \left(\sqrt{2}\right)^n$

$$\begin{aligned} OM_n > 4 &\iff \left(\sqrt{2}\right)^n > 4 \\ &\iff \left(\sqrt{2}\right)^n > \left(\sqrt{2}\right)^4 \\ &\iff n > 4 \end{aligned}$$

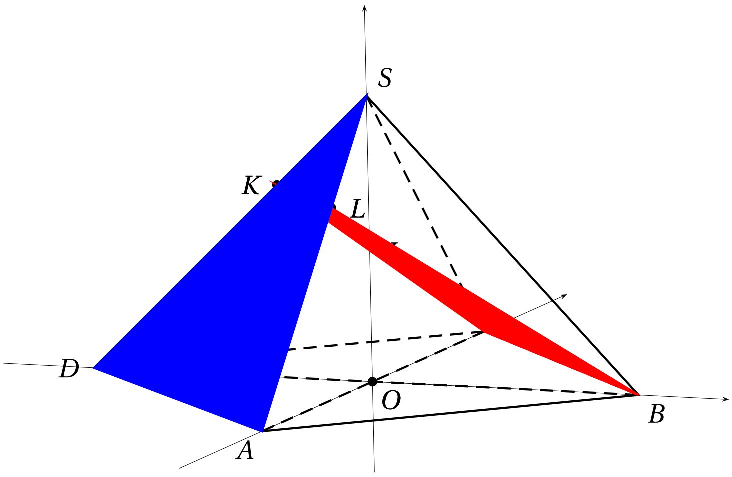
Donc pour $n_0 = 5$, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD



EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB = 1.
On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OS}}\right)$ est orthonormé.

> **Solution:** On sait que les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et de même longueur, on en déduit que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux et de même norme 1.
> (SO) est la hauteur de la pyramide, elle est donc perpendiculaire à la bas $ABCD$, on en déduit que $\overrightarrow{OS}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OB}$ et à $\overrightarrow{OC}$
> de plus on sait que SOC est rectangle en O avec $OC = OB = 1$ et $SC = \sqrt{2}$ donc $SO = 1$
> Finalement $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OS}}\right)$ est orthonormé

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OS}}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{\mathrm{SK}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{SD}}$ et on note I le milieu du segment [SO].

a. Déterminer les coordonnées du point K.

> **Solution:** Dans $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OS}}\right)$ on a $S(0\,;\,0\,;\,1)$, $D(-1\,;\,0\,;\,0)$
> donc $\overrightarrow{SD}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. On en déduit $K\left(-\dfrac{1}{3}\,;\,0\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$

b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.

Solution: $I\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et $B(1\,;\,0\,;\,0)$

donc $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-\dfrac{4}{3}\\0\\\dfrac{2}{3}\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{BK}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{BI}$

On peut donc conclure que B,I et K sont alignés

c. On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).
Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

Solution: (BCI) coupe (ABC) suivant la droite (BC)

(SAD) coupe (ABC) suivant la droite (AD)

or $(AD)//(BC)$ donc d'après le théorème du toit, (BCI) et (SAD) se coupent suivant une parallèle à (AD) et comme on sait déjà que K appartient à cette intersection, on en déduit que la parallèle à (AD) passant par K appartient à (BCI) et coupe $[SA]$

On a bien $(AD)//(KL)$

d. Déterminer les coordonnées du point L.

Solution:

$(KL)//(AD)$ donc K et L ont la même cote

$L\in(SOC)$ donc son abscisse est nulle

$L\left(0\,;\,y_L\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$

Dans SAD, on a $K\in[SD]$, $L\in[SA]$ et $(KL)//(AD)$ donc d'après le théorème de Thalès on a $\dfrac{SL}{SA}=\dfrac{SK}{SD}\iff SL=SK$ car $SA=SD$

$SK^2=\dfrac{2}{9}$ voir 2.a. or $SL^2=y_L^2+\dfrac{1}{9}\Longrightarrow y_L^2=\dfrac{1}{9}$ or $y_L<0$

Finalement $L\left(0\,;\,-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$

3. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\text{OB}},\overrightarrow{\text{OC}},\overrightarrow{\text{OS}}\right)$.

a. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

Solution: $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI}=0$

Donc $\vec{n}$ est normal au plan (BCI) car il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

Solution: $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

on remarque que $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{DS}$ donc $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires

c. Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

Solution: $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (BCI) et $\overrightarrow{n}$ est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires du plan (SAD)

On en déduit que $(BCI) \perp (SAD)$

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.

On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. a. Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1), P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \text{ et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1).$$

Solution: $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ est la probabilité qu'il y ait exactement une blanche dans l'urne U après le $(n+1)-$ième tirage sachant qu'il y en avait exactement une au $n-$ième tirage

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2}$ car il s'agit de choisir une blanche dans chaque urne avec une probabilité $\frac{1}{4}$ ou de choisir une boule noire dans chaque urne avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ pour que la situation reste inchangée.

$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = 1$ car cela signifie que U ne contient que des boules noires et que l'on cherche la probabilité que l'urne V nous redonne une blanche (probabilité =1 car V ne contient que des blanches)

$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = 1$ car cela signifie que U ne contient que des boules blanches et que l'on cherche la probabilité que l'urne V nous redonne une noire (probabilité =1 car V ne contient que des noires)

b. Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

Solution:
$(X_n=0)$, $(X_n=1)$ et $(X_n=2)$ forment une partition de l'univers de départ du $(n+1)-$ième tirage on a donc

$P(X_{n+1}=1) = P\Big((X_{n+1}=1)\cap(X_n=0)\Big)+P\Big((X_{n+1}=1)\cap(X_n=1)\Big)+P\Big((X_{n+1}=1)\cap(X_n=2)\Big)$

$= P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)\times P(X_n=0)+P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)\times P(X_n=1)+P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\times P(X_n=2)$

$= P(X_n=0)+\dfrac{1}{2}P(X_n=1)+P(X_n=2)$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n=\begin{pmatrix}P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2)\end{pmatrix}$$

et on considère M la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1}=R_n\times M$.
Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n=R_0\times M^n$.

Solution:

$R_1 = R_0\times M=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Démonstration par récurrence de $\forall n\in\mathbb{N}, R_n=R_0\times M^n$

Initialisation : $M^0=I_3$ et $R_0\times I_3=R_0$

hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $R_k=R_0\times M^k$
Alors $R_{k+1}=R_k\times M=R_0\times M^k\times M=R_0\times M^{k+1}$
la propriété est donc héréditaire à partir du rang 0 et vraie au rang 0 donc on a bien :
$\forall n\in\mathbb{N}, R_n=R_0\times M^n$

3. On admet que $M=P\times D\times P^{-1}$ avec :

$$P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\text{ et } P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$.

Solution:
Initialisation : $M^0 = I_3$ et $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times I_3 \times P = P \times P^{-1} = I_3$

hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $M^k = P \times D^k \times P^{-1}$
Alors $M^{k+1} = M^k \times M = R_k \times M = P \times D^k \times P^{-1} \times M = P \times D^k \times P^{-1} \times P \times D \times P^{-1} = P \times D^k \times D \times P^{-1} = P \times D^{k+1} \times P^{-1}$
la propriété est donc héréditaire à partir du rang 0 et vraie au rang 0 donc on a bien :
$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = P \times D^n \times P^{-1}$

On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. **a.** Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n.

Solution:
$$D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Sachant que $R_0 P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

Solution:
$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = R_0 \times M^n = R_0 \times P \times D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $R_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 2)$.
Interpréter ces résultats.

Solution: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

Donc par produit et somme $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{6}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = \frac{2}{3}$

Cela signifie que la probabilité que les urnes se retrouvent dans la situation initiale se stabilise vers $\frac{2}{3}$ quand n devient grand

la probabilité que les urnes soient « monochrome » se stabilise vers $\frac{1}{3}$: $\left(\frac{1}{6}\right.$ pour chaque couleur$\left.\right)$