Math93.com
MathExams.fr

Baccalauréat 2015 - S Polynésie

Série S Obli. et Spé.
12 Juin 2015
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

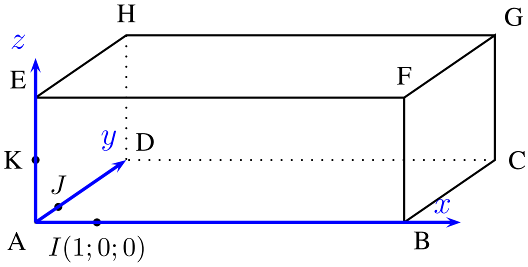
/

Exercice 1. 3 points

Commun à tous les candidats

Dans le pavé droit ABCDEFGH ci-dessus, AB = 6, AD = 4 et AE = 2. Et I, J et K sont les points tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AK}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$



1. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ -9)$ est normal au plan (IJG).

- **Calculons les coordonnées des points de la figure**.
  On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AI}},\ \overrightarrow{\mathrm{AJ}},\ \overrightarrow{\mathrm{AK}}\right)$. Donc :

$$\boxed{A\,(0\,;\,0\,;\,0)\ ;\ I\,(1\,;\,0\,;\,0)\ ;\ J\,(0\,;\,1\,;\,0)\ ;\ K\,(0\,;\,0\,;\,1)}$$

  Et d'après les données on a :

$$\boxed{B\,(6\,;\,0\,;\,0)\ ;\ D\,(0\,;\,4\,;\,0)\ ;\ E\,(0\,;\,0\,;\,2)}$$

  En outre puisque le point G est sur le pavé, on a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \\
\overrightarrow{AG} &= 6\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\
\overrightarrow{AG} &= 6\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AK} \implies \boxed{G\,(6\,;\,4\,;\,2)}
\end{aligned}$$

- **Vecteurs du plan**.
  On peut donc calculer les coordonnées de deux vecteurs (non colinéaires) qui engendrent le plan (IJG).

$$\left\{\begin{array}{l|} I\,(1\,;\,0\,;\,0) \\ J\,(0\,;\,1\,;\,0) \\ G\,(6\,;\,4\,;\,2) \end{array}\right. \implies \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$$

- **Vérifions que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (IJG)**.

$$\left\{\begin{array}{llll}
\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-9\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} & = -2+2 & = 0 \\
\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-9\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} & = 10+8-18 & = 0
\end{array}\right.$$

  Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJG), $\overrightarrow{n}$ donc un vecteur normal au plan (IJG).

2. Déterminer une équation du plan (IJG).

Propriété 1

Soit vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul et un point A de l'espace. L'unique plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal est normal $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = 0$.
Dans un repère de l'espace, son équation est alors de la forme :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff a\,(x-x_A)+b\,(y-y_A)+c\,(z-z_A)=0$$

Donc d'après la propriété 1 :

$$\begin{aligned} M(x\,;\,y\,;\,z)\in(IJG) &\iff \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} = 0 \\ M(x\,;\,y\,;\,z)\in(IJG) &\iff 2(x-1)+2(y-0)-9(z-0)=0 \\ M(x\,;\,y\,;\,z)\in(IJG) &\iff 2x+2y-9z-2=0 \end{aligned}$$

$$\boxed{(IJG)\ :\ 2x+2y-9z-2=0}$$

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).

- **Déterminons l'équation de la droite (BF).**

$$\left\{\begin{array}{l} B\,(6\,;0\,;0) \\ F\,(6\,;0\,;2) \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La droite (BF) passant par le point B et de vecteur directeur $\overrightarrow{BF}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{BM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BF}$. On a alors :

$$(BF)=\left\{M(x\,;\,y\,;\,z)\,;\ \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-6 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = t\,\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\quad,\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

Une représentation paramétrique de la droite (BF) est donc :

$$\boxed{(BF)\ :\ \left\{\begin{array}{l} x=6 \\ y=0 \\ z=2t \end{array}\right.\quad,\ t\in\mathbb{R}}$$

- **Déterminons les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF)**
La droite (BF) n'est pas parallèle au plan (IJG). Pour trouver les coordonnées de leur point d'intersection on doit résoudre le système :

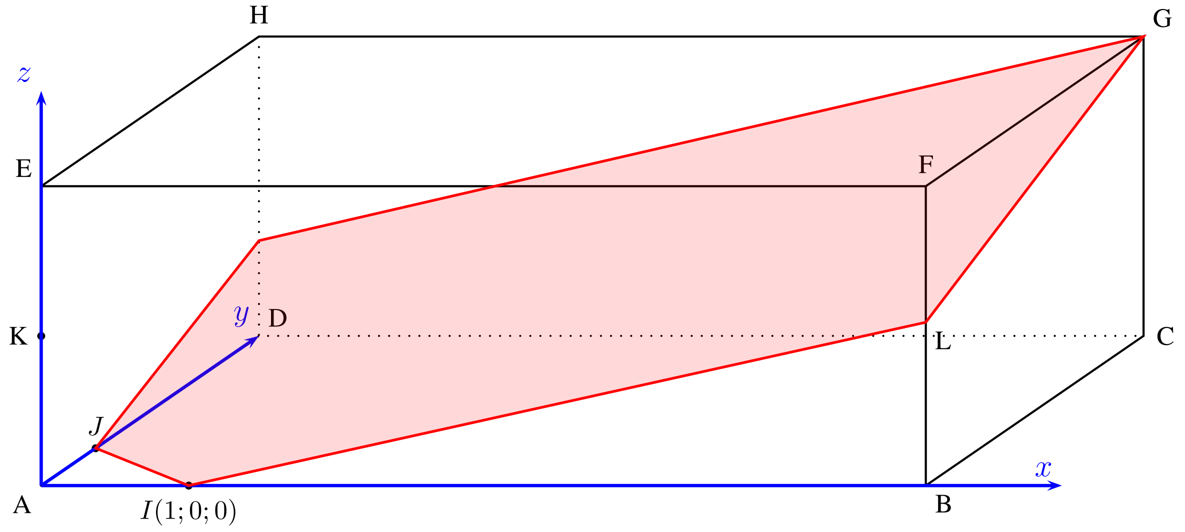
$$\left\{\begin{array}{l} 2x+2y-9z-2=0 \\ x=6 \\ y=0 \\ z=2t \end{array}\right. \qquad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Pour cela on va injecter dans l'équation du plan les équations paramétriques de la droite.

$$2\times6+2\times0-9\times2t-2=0 \iff 12-18t-2=0 \iff t=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

On obtient donc pour $t=\dfrac{5}{9}$, les coordonnées du point d'intersection L : $\boxed{L\left(6\,;\,0\,;\,\dfrac{10}{9}\right)}$.

4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG).
On ne demande pas de justification.



Exercice 2. Complexes 4 points

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2 + 4z + 3$.

1. Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Le point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé donc si $M(z) = M'(z')$ soit :

$$M(z) = M'(z') \iff z = z^2 + 4z + 3 \iff z^2 + 3z + 3 = 0$$

L'équation $z^2 + 3z + 3 = 0$ est une équation du second degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec : $a = 1$; $b = 3$; $c = 3$.
Le discriminent $\Delta = -3 < 0$ donc elle admet deux racines complexes conjuguées.

$$\boxed{z_1 = \frac{-3 + \text{i}\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{-3 - \text{i}\sqrt{3}}{2}}$$

Pour avoir la forme exponentielle de z_1 :

$$\left\{\begin{array}{ll} \left|\left(\dfrac{-3 + \text{i}\sqrt{3}}{2}\right)\right| & = \dfrac{1}{2}\sqrt{(3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} \\ \left(\dfrac{-3 + \text{i}\sqrt{3}}{2}\right) & = \sqrt{3} \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\,\dfrac{1}{2}\right) \\ & = \sqrt{3} \times \left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + \text{i}\sin\dfrac{5\pi}{6}\right) \end{array}\right| \implies z_1 = \frac{-3 + \text{i}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$$

On a donc :

$$\boxed{z_1 = \sqrt{3}\,\text{e}^{\frac{5\,\text{i}\,\pi}{6}} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3}\,\text{e}^{-\frac{5\,\text{i}\,\pi}{6}}}$$

2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3 - \text{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + \text{i}\sqrt{3}}{2}$. Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

- On a : $OA = |z_2| = \sqrt{3} = OB = |z_1|$;
- En outre :

$$\begin{aligned} AB &= |z_B - z_A| \\ AB &= \left|\frac{-3 + \text{i}\sqrt{3}}{2} - \frac{-3 - \text{i}\sqrt{3}}{2}\right| \\ AB &= \left|\frac{2\,\text{i}\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3} \end{aligned}$$

- On a bien montré que

$$\boxed{OA = OB = AB = \sqrt{3}}$$

Donc le triangle OAB est un triangle équilatéral.

3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + \text{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

Pour tous réels x et y on a , si $M(z) = M(x + \text{i}\,y)$ alors le point associé M' est d'affixe z' telle que :

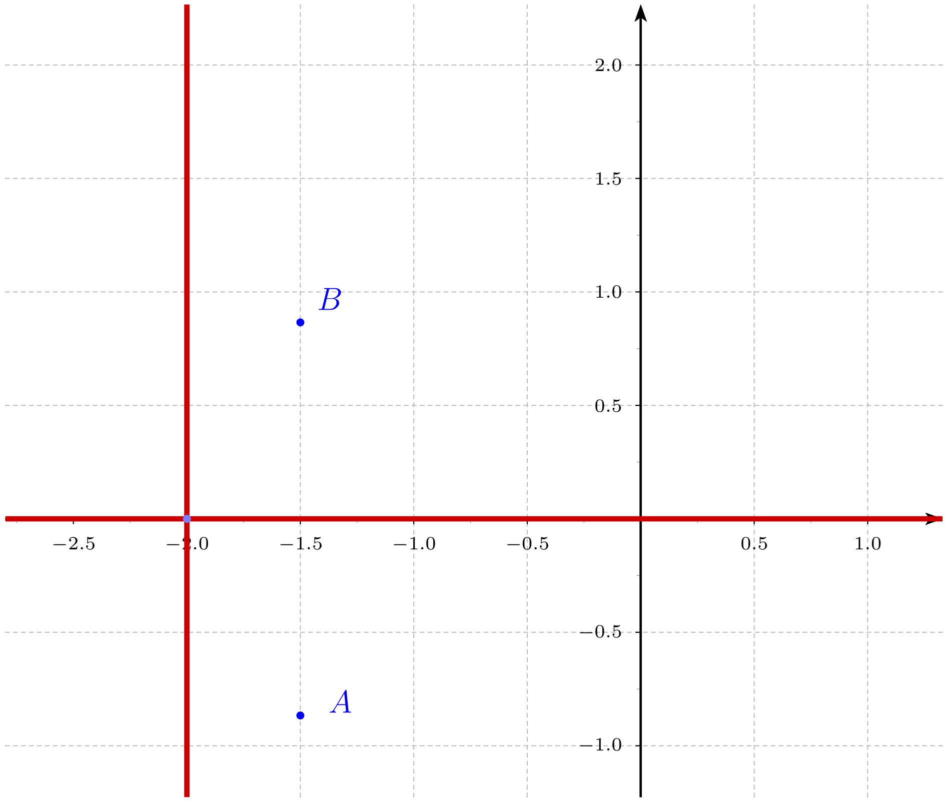
$$\begin{aligned} z' &= z^2 + 4z + 3 \\ z' &= (x + \text{i}\,y)^2 + 4(x + \text{i}\,y) + 3 \\ z' &= x^2 + 2\,\text{i}\,xy - y^2 + 4x + 4\,\text{i}\,y + 3 \\ z' &= \left(x^2 - y^2 + 4x + 3\right) + \text{i}\,(2xy + 4y) \end{aligned}$$

Or le point $M'(z')$ appartient à l'axe des réels si la partie imaginaire de son affixe est nulle soit :

$$M'(z') \in (Ox) \iff \text{Im } z' = 0$$
$$M'(z') \in (Ox) \iff 2xy + 4y = 0$$
$$M'(z') \in (Ox) \iff 2y(x+2) = 0$$
$$M'(z') \in (Ox) \iff \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou } x = -2 \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc la réunion de l'axe des abscisses et de la droite verticale d'équation $x = -2$.

4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.



©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Probabilité — 3 points

Commun à tous les candidats

- **La taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type $\sigma_1 = 6$ cm ;**
- **et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm.**

1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?
On cherche $P(153 \leq X_1 \leq 177)$ où X_1 suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu = 165\ ;\ \sigma^2 = 6^2\right)$. La calculatrice peut donner directement le résultat mais il est plus judicieux d'appliquer la propriété suivante :

Propriété 2 (Les intervalles « un, deux, trois sigma »)

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ alors :

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &\approx 0,683 \quad : (1) \\ P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &\approx 0,954 \quad : (2) \\ P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &\approx 0,997 \quad : (3) \end{aligned}$$

Ici la variable aléatoire X_1 suit une loi $\mathcal{N}\left(\mu = 165\ ;\ \sigma^2 = 6^2\right)$. On a donc ici d'après la relation (1) de la propriété 2 :

$$\begin{aligned} P(153 \leq X \leq 177) &= P(165 - 12 \leq X \leq 165 + 12) \\ P(153 \leq X \leq 177) &= P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \end{aligned}$$

En appliquant la relation (2) de la propriété 2 on a donc, arrondi au centième comme demandé dans la consigne générale :

$$\boxed{P(153 \leq X \leq 177) \approx 0,95}$$

2.

2. a. Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.
On cherche $P(X_2 > 170)$ où X_2 suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu = 175\ ;\ \sigma^2 = 11^2\right)$. On a la propriété suivante :

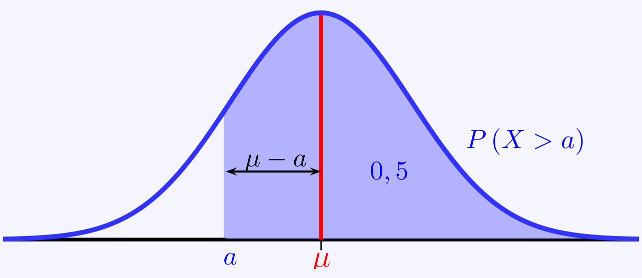
Propriété 3 $(P(X > a)\ ;\ a < \mu)$

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\ ;\ \sigma^2\right)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a < \mu$:

$$\boxed{P(X > a) = P(a < X < \mu) + 0,5}$$



On va donc ici en appliquant la propriété 3 avec $\mu = 175$ et $a = 170$.

$$\boxed{P(X_2 > 170) = 0,5 + P(170 < X_2 < 175) \approx 0,68}$$

Remarque : Sur la TI Voyage 200

$$\text{TIStat.normFDR}(170, 175, 175, 6) \approx 0{,}175\,291\,94$$

©ISSN 2272-5318

2. b. *Question de recherche avec prise d'initiative !*
De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52 % de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de $1,70$ m.
Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

- **Notations**
En notant F l'évènement : « la personne choisie est une femme » et A l'évènement : « la personne choisie mesure plus de 170 cm » la probabilité cherché est donc :

$$P_A(F) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)} = \frac{P_F(A) \times P(F)}{P(A)}$$

- **Calculons $P(X_1 > 170) = P_F(A)$.**
La probabilité qu'une personne mesure plus de 170 cm sachant que c'est une femme.

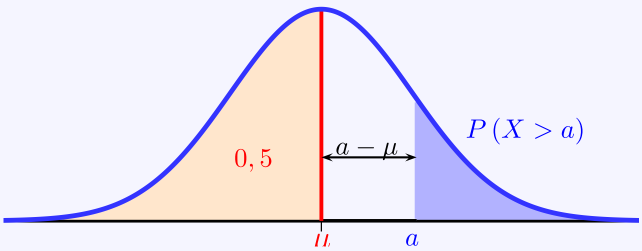
Propriété 4 ($P(X > a)$; $a > \mu$)

Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ alors on a :

$$P(X < \mu) = 0,5 = P(X > \mu)$$

De plus pour tout réel a avec $a > \mu$:

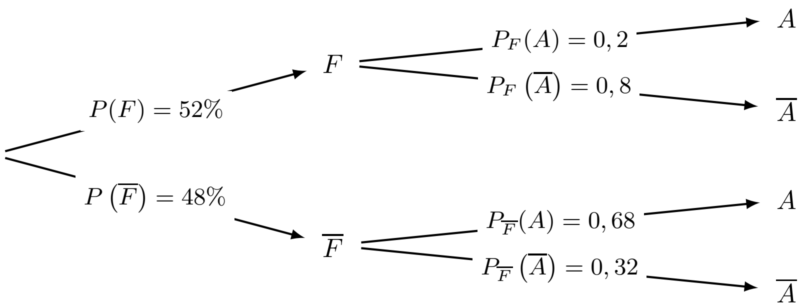
$$\boxed{P(X > a) = 0,5 - P(\mu < X < a)}$$



En appliquant à X_1 la propriété 4 avec $\mu = 165$ et $a = 170$.

$$\boxed{P(X_1 > 170) = 0,5 - P(165 < X_1 < 170) \approx 0,2}$$

- **Modélisation.**
On peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre. On a noté F l'évènement : « la personne choisie est une femme » et A l'évènement : « la personne choisie mesure plus de 170 cm » on a alors d'après les données $P(F) = 52\%$, $P_F(A) = P(X_1 > 170) \approx 0,2$ et $P_{\overline{F}}(A) = P(X_2 > 170) \approx 0,68$. De ce fait :



- **Calculons $P(A)$**
On cherche $P(A)$ or d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(A \cap F) + P\left(A \cap \overline{F}\right)$$
$$P(A) = P(F) \times P_F(A) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(A)$$
$$P(A) \approx 0{,}52 \times 0{,}2 + 0{,}48 \times 0{,}68$$
$$P(A) \approx 0{,}104 + 0{,}3264$$

Soit

$$\boxed{P(A) \approx 0{,}4304}$$

- **Conclusion**

$$\boxed{P_A(F) = \frac{P_F(A) \times P(F)}{P(A)} \approx \frac{0,2 \times 0,52}{0,4304} \approx 0,24}$$

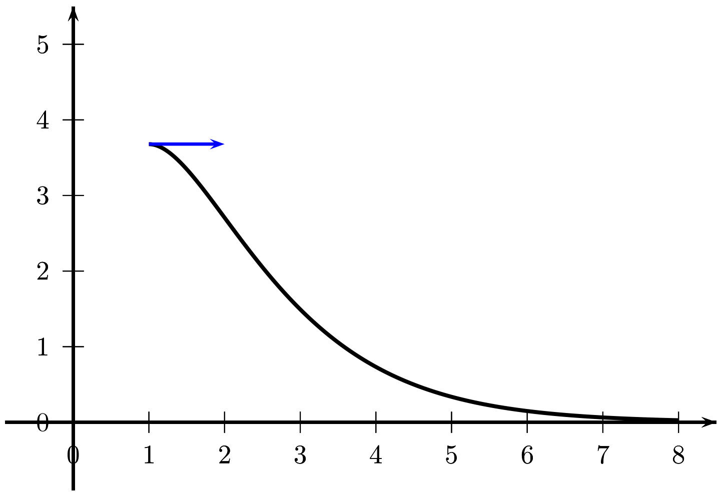
La probabilité que cette personne soit une femme sachant qu'elle mesure plus de 170 cm est environ de $0,24$.

Exercice 4. 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A - Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 8] par : $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ où a et b sont deux entiers naturels.. La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.

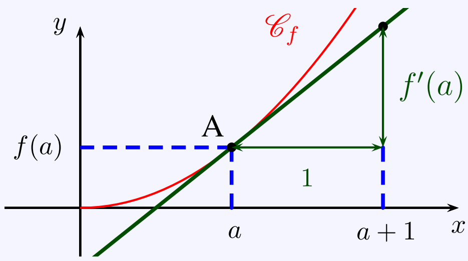


1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale. Déterminer la valeur de b.

Propriété 5 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donnée par :

$$\boxed{T \ : \ y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



- **Calcul de la dérivée**.

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [1\,;\,8] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = (ax+b) \times e^{-x} \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur $[1\,;\,8]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [1\,;\,8] \ ; \ f(x) = u(x) \times v(x) \ : \ \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = (ax+b) & ; & u'(x) = a \\ v(x) = e^{-x} & ; & v'(x) = (-e^{-x}) \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [1\,;\,8], \ f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= a \times e^{-x} + (ax+b) \times \left(-e^{-x}\right) \\ f'(x) &= e^{-x} \times (-ax + b - a) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [1\,;\,8] \ ; \ f'(x) = e^{-x} \times (-ax - b + a)}$$

 ©ISSN 2272-5318

- **Calcul de b.**
  On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale, de ce fait, d'après la propriété 5, le nombre dérivé de f en 1 doit être nul soit :

$$f'(1) = 0 \iff \mathrm{e}^{-1} \times (-a \times 1 - b + a) = 0$$
$$f'(1) = 0 \iff -b\,\mathrm{e}^{-1} = 0$$

$$\boxed{f'(1) = 0 \iff b = 0}$$

2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre $3,5$ et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de l'entier a.

Le haut du toboggan en donné par la valeur de $f(1)$. Or on a :

$$f(1) = (a + b)\,\mathrm{e}^{-1} = a\,\mathrm{e}^{-1}$$

On veut que le haut du toboggan soit situé entre $3,5$ et 4 mètres d'où :

$$3,5 \leq f(1) \leq 4 \iff 3,5 \leq a\,\mathrm{e}^{-1} \leq 4$$

En multipliant chaque membres par $\mathrm{e}^{1} > 0$ on obtient :

$$3,5 \leq f(1) \leq 4 \iff 3,5\,\mathrm{e}^{1} \leq a \leq 4\,\mathrm{e}^{1}$$

Or a est un nombre entier donc :

$$3,5 \leq f(1) \leq 4 \iff \boxed{9 < 3,5\,\mathrm{e}^{1} \approx 9,51 \leq a \leq 4\,\mathrm{e}^{1} \approx 10,87 < 11}$$

L'unique valeur entière possible pour a est donc $\underline{a = 10}$.

Partie B - Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1\,;\,8]$ par : $f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}$.
Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,8]$ par $g(x) = 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} [1\,;\,8] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = 10\,(-x-1) \times \mathrm{e}^{-x} \end{array} \right.$$

La fonction g est dérivable sur $[1\,;\,8]$ comme produit, composée et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction g est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [1\,;\,8]\ ;\ g(x) = u(x) \times v(x) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = 10\,(-x-1) & ; & u'(x) = -10 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} & ; & v'(x) = (-\,\mathrm{e}^{-x}) \end{array} \right.$$

On a donc :

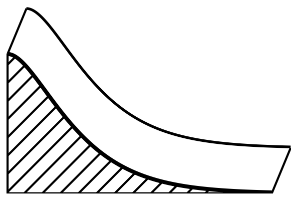
$$\begin{aligned} \forall x \in [1\,;\,8]\,,\ g'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ g'(x) &= -10 \times \mathrm{e}^{-x} + 10\,(-x-1) \times \left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right) \\ g'(x) &= \mathrm{e}^{-x} \times (-10 + 10x + 10) \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [1\,;\,8]\ ;\ g'(x) = 10x\,\mathrm{e}^{-x} = f(x)}$$

Remarque : on vient de montrer que g est une primitive de f sur $[1\,;\,8]$.

2. Quel est le montant du devis de l'artiste ?



La surface hachurée $\mathcal{S}$ représente l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ entre les droites verticales d'équations $x = 1$ et $x = 8$. Il s'agit donc de l'intégrale sur $[1 ; 8]$ de f, exprimée en unité d'aire (soit ici en m^2).

$$\mathcal{S} = \int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\mathcal{S} = \int_1^8 10x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Or d'après la question **B1.**, $g'(x) = f(x)$ et donc g est une primitive de f sur $[1 ; 8]$ soit :

$$\mathcal{S} = \big[\ g(x)\ \big]_1^8$$
$$\mathcal{S} = g(8) - g(1)$$
$$\mathcal{S} = \underbrace{10(-8-1)}_{-90}\mathrm{e}^{-8} - \underbrace{10(-1-1)}_{(-20)}\mathrm{e}^{-1}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = -90\mathrm{e}^{-8} + 20\mathrm{e}^{-1} \approx 7,327\ \text{m}^2}$$

Sur le devis qu'il propose, l'artiste demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint. Le devis sera donc de :

$$\boxed{300 + 50 \times \mathcal{S} \approx 666,37€}$$

Partie C - Une contrainte à vérifier

Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 8]. On admet que, pour tout x de l'intervalle [1 ; 8], $f'(x) = 10(1 - x)\mathrm{e}^{-x}$. Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle [1 ; 8].

- **Calcul de la dérivée**.

$$f' : \left\{ \begin{array}{rcl} [1 ; 8] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) = 10\,(1-x) \times \mathrm{e}^{-x} \end{array} \right.$$

La fonction f' est dérivable sur $[1 ; 8]$ comme produit, composée et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction f' est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [1 ; 8]\ ;\ f'(x) = u(x) \times v(x) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u(x) = 10\,(1-x) & ; & u'(x) = -10 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} & ; & v'(x) = (-\mathrm{e}^{-x}) \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\forall x \in [1 ; 8],\quad f''(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$
$$f''(x) = -10 \times \mathrm{e}^{-x} + 10\,(1-x) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$
$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x} \times (-10 + 10x - 10)$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [1 ; 8]\ ;\ f''(x) = (10x - 20)\,\mathrm{e}^{-x}}$$

- **Variations de f'.**
La fonction dérivée de f'' s'exprime comme un produit de deux facteurs :

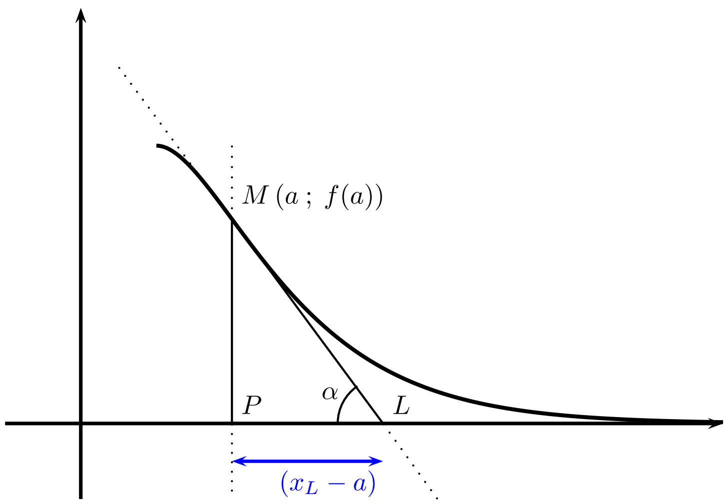
$$\forall x \in [1\,;\,8]\ ;\ f''(x) = (x-2) \times 10\mathrm{e}^{-x}$$

Le deuxième facteur, $10\mathrm{e}^{-x}$ est strictement positif, pour tout réel x, donc à fortiori sur $[1\,;\,8]$.
Le signe de $f''(x)$ dépend donc uniquement de celui du premier facteur $(x-2)$ dont l'étude est aisée.

x	$-\infty$		1		2		8		$+\infty$
signe de $x - 2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

La dérivée seconde f'' est donc négative sur $[1\,;\,2[$, nulle en 2 et positive sur $]2\,;\,8]$.
La fonction f' est donc décroissante sur $[1\,;\,2]$ et croissante sur $[2\,;\,8]$.

2. Soit x un réel de l'intervalle $]1\,;\,8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan\alpha = |f'(x)|$.
Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan. On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses. La figure suivante illustre la situation.



- Considérons que le point M est d'abscisse a pour faciliter les notations.
- Le triangle MPL étant rectangle en P on a :

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{PM}{PL} = \frac{f(a)}{|x_L - a|}}$$

- D'après la propriété 5, l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Le point L est le point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses donc $y_L = 0$.
De ce fait $f'(a)$ est non nul et :

$$\begin{aligned} y_L = f'(a)(x_L - a) + f(a) &\iff 0 = f'(a)(x_L - a) + f(a) \\ &\iff f'(a)(x_L - a) = -f(a) \end{aligned}$$

Puisque $f'(a)$ est non nul car par hypothèse $a \neq 1$:

$$\iff x_L - a = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

Soit

$$\boxed{x_L - a = -\frac{f(a)}{f'(a)}}$$

©ISSN 2272-5318

- On en déduit donc que :

$$\tan\alpha = \frac{f(a)}{|x_L - a|} == \frac{f(a)}{\left|-\dfrac{f(a)}{f'(a)}\right|} = |f'(a)|$$

- **Conclusions** :
  Si on suppose que M est le point d'abscisse a de la courbe $\mathcal{C}$, alors $\tan\alpha = |f'(a)|$, de ce fait, si on suppose que M est le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$, alors :

$$\boxed{\tan\alpha = |f'(x)|}$$

3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?
Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

- On vient de montrer lors de la question **C2.** que : $\tan\alpha = |f'(x)|$.
- On a : $\tan 55 \approx 1,43$.
  La fonction tangente étant croissante sur $[0\,;\,90°]$, on va donc vérifier si $\tan\alpha$ est bien inférieur à $\tan 55°$.
  Montrons donc que :

$$\tan\alpha = |f'(x)| < \tan 55°$$

- D'après l'étude menée lors de la question **C1.** on a :

$$\forall x \in [1\,;\,8]\ ;\ f'(x) = 10(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

x	1		2		8
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	0	↘	$-10\,\mathrm{e}^{-2} \approx -1.35$	↗	$-70\,\mathrm{e}^{-8} \approx -0.023$

D'après le tableau de variations, la fonction f' est négative sur $[1\,;\,8]$. Ainsi le maximum de $|f'(x)|$ est atteint là où f' atteint son minimum, soit en $x = 2$. On a :

$$|f'(2)| \approx 1,35 < \tan 55$$

De ce fait pour tout x de $[1\,;\,8]$:

$$\tan\alpha = |f'(x)| \leq |f'(2)| < \tan 55°$$

- **Conclusion**.
  On vient de montrer que :

$$\tan\alpha = |f'(x)| < \tan 55°$$

La fonction tangente étant croissante de 0° à 90°, cela implique donc que $\alpha < 55°$:

$$\tan\alpha < \tan 55° \Longrightarrow \alpha < 55°$$

Par conséquent le toboggan est conforme car l'angle α est inférieur à 55°.

Exercice 5. Obligatoire 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ ; \ (v_n) : \begin{cases} v_1 & = \ln(2) \\ v_{n+1} & = \ln\left(2 - \mathrm{e}^{-v_n}\right) \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^* \ ; \ (s_n) : S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

Partie A - Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour n choisi par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur $\boxed{\ln 2}$
	S prend la valeur $\boxed{\ln 2}$
Traitement :	Pour k variant de $\boxed{1 \text{ à } n-1}$ ou $\boxed{2 \text{ à } n}$ faire
	$\boxed{v}$ prend la valeur $\boxed{\ln\left(2 - \mathrm{e}^{-v}\right)}$
	$\boxed{S}$ prend la valeur $\boxed{S + v}$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).
La suite (S_n) semble être croissante et de limite $+\infty$.

Partie B - Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ ; \ (v_n) : \begin{cases} v_1 & = \ln(2) \\ v_{n+1} & = \ln\left(2 - \mathrm{e}^{-v_n}\right) \end{cases}$$

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

- On a $v_1 = \ln 2$ donc :
$$u_1 = \mathrm{e}^{v_1} = \mathrm{e}^{\ln 2} = 2$$
- On a pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , puisque $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$:
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathrm{e}^{\,v_{n+1}} \\ u_{n+1} &= 2 - \mathrm{e}^{\ln\left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right)} \\ u_{n+1} &= 2 - \left(2 - \mathrm{e}^{-v_n}\right) \\ u_{n+1} &= \mathrm{e}^{-v_n} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{\mathrm{e}^{v_n}} = \frac{1}{u_n} \end{aligned}$$
- Donc :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ ; \ (u_n) : \begin{cases} u_1 & = 2 \\ u_{n+1} & = 2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}}$$

2. Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

$u_2 = 2 - \dfrac{1}{u_1}$	$u_3 = 2 - \dfrac{1}{u_2}$	$u_4 = 2 - \dfrac{1}{u_3}$
$u_2 = 2 - \dfrac{1}{2}$	$u_3 = 2 - \dfrac{2}{3}$	$u_4 = 2 - \dfrac{3}{4}$
$\boxed{u_2 = \dfrac{3}{2}}$	$\boxed{u_2 = \dfrac{4}{3}}$	$\boxed{u_4 = \dfrac{5}{4}}$

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ ; \ (u_n) : \begin{cases} u_1 & = 2 \\ u_{n+1} & = 2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Notons pour tout entier naturel $n \geq 1$ le postulat

$$(P_n) \ : \ u_n = \frac{n+1}{n}$$

- **Initialisation**
  Le postulat (P_1) est vrai puisque pour $n = 1$:
  $$\begin{cases} \dfrac{n+1}{n} & = \dfrac{2}{1} = 2 \\ u_1 & = 2 \end{cases}$$
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n+1$.
  - On a par définition de la suite (u_n), pour $n \geq 1$:
    $$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$$
  - On applique alors l'hypothèse de récurrence qui implique que (P_n) soit vérifié et donc que
    $$u_n = \frac{n+1}{n}$$
  - Alors on obtient :
    $$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$$
    $$u_{n+1} = 2 - \frac{n}{n+1}$$
    $$u_{n+1} = \frac{2(n+1) - n}{n+1}$$
    $$u_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$
  - On a alors montré que $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (P_1) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{u_n = \frac{n+1}{n}}$$

Partie C - Étude de (Sn)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n non nul, on a défini la suite (u_n) par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.
De ce fait en composant par la fonction ln, définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; \ln u_n = v_n}$$

Or vient de montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n+1}{n}$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; v_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n}$$

2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; (s_n) : S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

Donc

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} v_k = v_1 + v_2 + v_3$$

On applique alors le résultat de la question précédente, pour n entier non nul : $v_n = \ln(n+1) - \ln n$

$$S_3 = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3)$$

Il ne reste que deux termes, le premier et le dernier, en effet en réarangeant (un nombre fini de termes) :

$$S_3 = -\ln 1 + \underbrace{(\ln 2 - \ln 2)}_{0} + \underbrace{(\ln 3 - \ln 3)}_{0} + \ln 4$$
$$S_3 = \underbrace{-\ln 1}_{0} + \ln 4$$

Soit

$$\boxed{S_3 = \ln 4}$$

3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

Pour tout entier n non nul :

$$S_n = \sum_{k=1}^{3} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

On applique alors le résultat de la question **C1.**, pour n entier non nul : $v_n = \ln(n+1) - \ln n$

$$S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots + (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n)$$

Il ne reste que deux termes, le premier et le dernier, en effet en réarangeant (un nombre fini de termes) :

$$S_3 = -\ln 1 + \underbrace{(\ln 2 - \ln 2)}_{0} + \underbrace{(\ln 3 - \ln 3)}_{0} + \cdots + \underbrace{(\ln(n-1) - \ln(n-1))}_{0} + \underbrace{(\ln n - \ln n)}_{0} + \ln(n+1)$$
$$S_3 = \underbrace{-\ln 1}_{0} + \ln(n+1)$$

Soit

$$\boxed{S_n = \ln(n+1)}$$

Et la limite de la suite (S_n) est alors immédiate :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$$

©ISSN 2272-5318

Exercice 5. Spécialité Maths 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$
$$A^2 = \begin{pmatrix} -4+2 & 6 \\ -3 & 5+2 \end{pmatrix}$$
$$A^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{2I}$$

Soit :

$$\boxed{A^2 = A + 2I}$$

2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme : $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels.

- Pour A^3.
  On a montré que :
  $$A^2 = A + 2I$$
  Donc en multipliant chaque membre de cette égalité, à gauche, par A on obtient :
  $$A^3 = A \times A^2 = A \times (A + 2I)$$
  $$A^3 = \underbrace{A^2}_{A+2I} + 2A$$
  On réutilise à nouveau l'égalité de la question **1.** soit : $A^2 = A + 2I$
  $$A^3 = (A + 2I) + 2A$$
  D'où l'égalité demandée avec $\alpha = 3$ et $\beta = 2$:
  $$\boxed{A^3 = 3A + 2I}$$
- Pour A^4.
  On a montré que :
  $$A^3 = 3A + 2I$$
  Donc en multipliant chaque membre de cette égalité, à gauche, par A on obtient :
  $$A^4 = A \times A^3 = A \times (3A + 2I)$$
  $$A^4 = 3\underbrace{A^2}_{A+2I} + 2A$$
  On réutilise à nouveau l'égalité de la question **1.** soit : $A^2 = A + 2I$
  $$A^3 = 3\,(A + 2I) + 2A$$
  D'où l'égalité demandée avec $\alpha = 5$ et $\beta = 6$:
  $$\boxed{A^3 = 5A + 6I}$$

©ISSN 2272-5318

3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout <u>entier naturel n non nul</u> : $r_{n+1} = r_n + s_n$ et $s_{n+1} = 2r_n$.

Remarque *: une <u>erreur</u> dans le sujet, si on définit ainsi les suites pour n non nul, les termes de rang 1 ne sont pas calculables donc ... On va considérer que les suites (r_n) et (s_n) définies par :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} r_0 & = & 0 \\ s_0 & = & 1 \end{array}\right. \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\ ; \left\{\begin{array}{rcl} r_{n+1} & = & r_n + s_n \\ s_{n+1} & = & 2r_n \end{array}\right.$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = r_n A + s_n I$.

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ le postulat :

$$(P_n) \ : \ A^n = r_n A + s_n I$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, le postulat (P_0) est vrai puisque :
  - D'une part : $A^0 = I$;
  - D'autre part : $r_0 A + s_0 I = 0 \times A + 1 \times I = I$;
  - Soit : $A^0 = 0 \times A + 1 \times I$.
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, (P_n) soit vérifié et montrons qu'alors il est aussi vrai au rang $n + 1$.
  - On a :

  $$A^{n+1} = A \times A^n$$

  On applique alors l'hypothèse de récurrence : $(P_n) \ : \ A^n = r_n A + s_n I$

  $$A^{n+1} = A \times (r_n A + s_n I)$$
  $$A^{n+1} = r_n A^2 + s_n A$$

  On applique alors le résultat de la question **1.** : $A^2 = A + 2I$

  $$A^{n+1} = r_n (A + 2I) + s_n A$$
  $$A^{n+1} = \underbrace{(r_n + s_n)}_{r_{n+1}} A + \underbrace{2r_n}_{s_{n+1}} I$$

  - On a alors montré que $A^{n+1} = r_{n+1} A + s_{n+1} I$ et donc que (P_{n+1}) est vrai.
- **Conclusion**
  On a montré que (P_0) est vrai. De plus, si l'on suppose le postulat (P_n) vérifié, alors il l'est aussi au rang suivant, (P_{n+1}) est vrai. De ce fait la relation est vrai pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{A^n = r_n A + s_n I}$$

4. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n <u>non nul</u> (? *<u>encore une erreur</u>*) par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1.

On rappelle que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} r_0 & = & 0 \\ s_0 & = & 1 \end{array}\right. \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\ ; \left\{\begin{array}{rcl} r_{n+1} & = & r_n + s_n \\ s_{n+1} & = & 2r_n \end{array}\right.$$

Pour tout entier n on a :

$$k_{n+1} = r_{n+1} - s_{n+1}$$
$$k_{n+1} = (r_n + s_n) - 2r_n$$
$$k_{n+1} = -r_n + s_n$$
$$k_{n+1} = -(r_n - s_n)$$

©ISSN 2272-5318

Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; k_{n+1} = -k_n}$$

La suite (k_n) est géométrique de raison -1.

En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de k_n en fonction de n.
La suite (k_n) est géométrique de raison $q = -1$, et de premier terme :

$$k_0 = r_0 - s_0 = 0 - 1 = -1$$

Donc son terme général est :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; k_n = k_0 \times (q)^n$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,;\; k_n = -1 \times (-1)^n = (-1)^{n+1}}$$

5. On admet que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $t_n = r_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison 2. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de t_n en fonction de n.

$$\begin{cases} r_0 &= 0 \\ s_0 &= 1 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,;\begin{cases} r_{n+1} &= r_n + s_n \\ s_{n+1} &= 2r_n \end{cases}$$

On peut calculer quelques termes des suites (r_n) et (s_n) :

n	0	1	2	3	4	5
r_n	0	$r_1 = 1$	1	3	5	11
s_n	1	$s_1 = 0$	2	2	6	10

La suite (t_n) est géométrique de raison $q = 2$, et de premier terme :

$$t_1 = r_1 + \frac{(-1)^1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Donc son terme général est :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,;\; t_n = t_1 \times (q)^{n-1}$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\,;\; t_n = \frac{2}{3} \times (2)^{n-1} = \frac{2^n}{3}}$$

6. Déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression explicite de r_n et s_n en fonction de n.

- Puisque pour tout entier naturel n non nul on a :

$$t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3} \Longrightarrow r_n = t_n - \frac{(-1)^n}{3}$$

  Soit en utilisant le résultat de la question **5.** :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\,;\; r_n = \frac{2^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3}}$$

- Pour tout entier naturel n non nul on a :

$$k_n = r_n - s_n \Longrightarrow s_n = r_n - k_n$$

  Soit en utilisant le résultat des questions **4.** et **6.a** :

$$s_n = \frac{2^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3} - (-1)^{n+1}$$

  On va simplifier un peu l'écriture en remarquant que :

$$\begin{cases} -(-1)^n &= (-1) \times (-1)^n = (-1)^{n+1} \\ -(-1)^{n+1} &= (-1) \times (-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} = (-1)^2 \times (-1)^n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\,;\; s_n = \frac{2^n}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{3} + (-1)^n}$$

7. En déduire alors, pour tout entier naturel n non nul, une expression des coefficients de la matrice A^n.

Lors de la question **3.** nous avons montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\; A^n = r_n A + s_n I$$

Donc pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
A^n &= r_n A + s_n I \\
A^n &= r_n A + s_n I \\
A^n &= r_n \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + s_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^n &= \begin{pmatrix} -4r_n + s_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n + s_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or lors de la question **6.** nous avons montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,;\; \begin{cases} r_n &= \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3} \\ s_n &= \dfrac{2^n}{3} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{3} + (-1)^n \end{cases}$$

Donc :

- On a :

$$\begin{aligned}
-4r_n + s_n &= -4\left(\frac{2^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3}\right) + \frac{2^n}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{3} + (-1)^n \\
-4r_n + s_n &= \underbrace{-4 \times \frac{2^n}{3} + \frac{2^n}{3}}_{-3\times\frac{2^n}{3}} + \underbrace{4 \times \frac{(-1)^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3}}_{3\times\frac{(-1)^n}{3}} + (-1)^n \\
-4r_n + s_n &= -2^n + (-1)^n + (-1)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{-4r_n + s_n = -2^n + 2 \times (-1)^n}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
5r_n + s_n &= 5\left(\frac{2^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3}\right) + \frac{2^n}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{3} + (-1)^n \\
5r_n + s_n &= \underbrace{5 \times \frac{2^n}{3} + \frac{2^n}{3}}_{6\times\frac{2^n}{3}} \; \underbrace{-5 \times \frac{(-1)^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3}}_{-6\times\frac{(-1)^n}{3}} + (-1)^n \\
5r_n + s_n &= 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n + (-1)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{5r_n + s_n = 2^{n+1} - (-1)^n = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$$

- Puis

$$\boxed{6r_n = 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n} \quad \text{et} \quad \boxed{-3r_n = -2^n + (-1)^n}.$$

- Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\,;\; A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \times (-1)^n & 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}}$$

 ©ISSN 2272-5318