Corrigé

∽ Baccalauréat S – Centres étrangers ∾ 10 juin 2015

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a $p = 0,03$ et $n = 500$. Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \approx [0,015\,;\,0,045]$$

La fréquence observée est $f = \dfrac{19}{500} = 0,038$; $f \in I$ donc ce contrôle ne remet pas en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux.

2. La fréquence de cadenas défectueux dans l'échantillon de taille $n = 500$ observé est $f = \dfrac{39}{500} = 0,078$.
Les trois conditions $n = 500 \geqslant 30$, $nf = 39 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 461 \geqslant 5$ sont vérifiées.
Donc un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est donné par :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f - \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}}\,;\, 0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx [0,033\,;\,0,123]$$

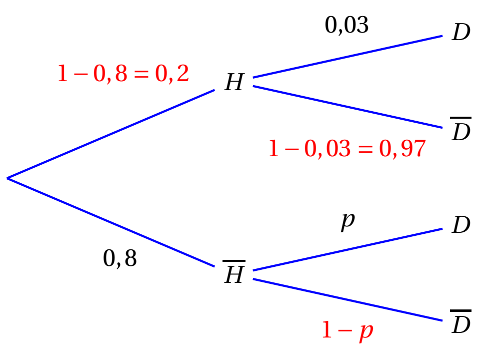
Partie B

1. Le nombre de cadenas *premier prix* est modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 725$ et d'écart type $\sigma = 25$. On cherche $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.
Or $725 = \mu - \sigma$ et $775 = \mu + \sigma$; on cherche donc $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$ dont on connaît une valeur approchée au centième : 0,68 (d'après le cours).
Pour avoir le résultat au millième, on utilise la calculatrice : $P(725 \leqslant X \leqslant 775) \approx 0,683$

2. On cherche le plus petit entier n tel que $P(X > n) < 0,05$; or $P(X > n) < 0,05 \iff P(X \leqslant n) \geqslant 0,95$
Pour $P(X \leqslant b) = 0,95$, on obtient à la calculatrice : $b \approx 791,12$.
Donc le plus petit nombre n de cadenas nécessaires en début de mois pour avoir une probabilité de rupture de stock inférieure à 0,05 est $n = 792$.

Partie C

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



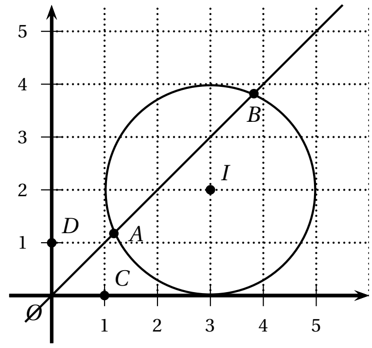
2. D'après la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(D \cap H) + P(D \cap \overline{H}) = 0,2 \times 0,03 + 0,8 \times p = 0,006 + 0,8p$
On sait que 7 % des cadenas sont défectueux donc $P(D) = 0,07$.
Donc : $0,07 = 0,006 + 0,8p \iff \dfrac{0,07 - 0,006}{0,8} = p \iff p = 0,08$
Le résultat obtenu est cohérent avec la question A.2 car $0,08 \in [0,033\,;\,0,123]$.

3. Le cadenas prélevé est en bon état.
La probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme* est $P_{\overline{D}}(H)$:
$$P_{\overline{D}}(H) = \frac{P(H \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(H \cap \overline{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,2 \times 0,97}{1 - 0,07} = \frac{0,194}{0,93} \approx 0,209$$

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. Affirmation 1 : l'ensemble S est le segment [AB] – **VRAI**
Soit M le point d'affixe z.



- $|z-1| = |z - \text{i}| \iff MC = MD$ où C est le point d'affixe 1 et D est le point d'affixe i.
  L'ensemble des points M tels que $|z-1| = |z - \text{i}|$ est donc la médiatrice du segment $[CD]$. C'est donc la droite d'équation $y = x$, donc la droite (AB).
- $|z - 3 - 2\,\text{i}| \leqslant 2 \iff MI \leqslant 2$ où I est le point d'affixe $3 + 2\,\text{i}$.
  L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 3 - 2\,\text{i}| \leqslant 2$ est donc le disque $\mathscr{D}$ de centre I et de rayon 2.
- L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant à la fois $|z-1| = |z - \text{i}|$ et $|z - 3 - 2\,\text{i}| \leqslant 2$ est l'intersection de la droite (AB) et du disque $\mathscr{D}$; c'est donc le segment $[AB]$.

2. Affirmation 2 : le nombre complexe $\left(\sqrt{3} + \text{i}\right)^{1515}$ est un réel – **FAUX**
Pour qu'un nombre non nul soit réel, il faut et il suffit qu'il ait pour argument 0 ou π, à 2π près.
On écrit le nombre $z = \sqrt{3} + \text{i}$ sous forme exponentielle : $|z| = \sqrt{3+1} = 2$, donc $z = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,\text{i}\right)$.

On cherche un réel θ tel que $\left\{\begin{array}{rcl} \cos\theta & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Donc $\sqrt{3} + \text{i}$ a pour argument $\dfrac{\pi}{6}$; on en déduit que $\left(\sqrt{3} + \text{i}\right)^{1515}$ a pour argument $1\,515 \times \dfrac{\pi}{6}$.
Or $\dfrac{1515\pi}{6} = 126 \times 2\pi + \dfrac{3\pi}{6}$ donc $\left(\sqrt{3} + \text{i}\right)^{1515}$ a pour argument $\dfrac{3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$.
Donc $\left(\sqrt{3} + \text{i}\right)^{1515}$ est un imaginaire pur non nul, donc ce n'est pas un réel.

3. Affirmation 3 :
une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t \\ y & = & -3 + 4t \\ z & = & 7 - 10t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. – **VRAI**

Soit d la droite dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t \\ y & = & -3 + 4t \\ z & = & 7 - 10t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

On regarde si le point E appartient à cette droite, autrement dit s'il existe une valeur de t pour laquelle
$\left\{\begin{array}{rcl} 2 & = & 2t \\ 1 & = & -3 + 4t \\ -3 & = & 7 - 10t \end{array}\right.$ La valeur $t = 1$ convient.

On regarde si le point F appartient à cette droite, autrement dit s'il existe une valeur de t pour laquelle
$\left\{\begin{array}{lcl} 1 &=& 2t\\ -1 &=& -3+4t\\ 2 &=& 7-10t \end{array}\right.$ La valeur $t=\dfrac{1}{2}$ convient.

Donc la droite (EF) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t\\ y &=& -3+4t\\ z &=& 7-10t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Affirmation 4 : une mesure en degré de l'angle $\widehat{FEG}$, arrondie au degré, est 50°– **VRAI**
Pour déterminer une mesure de l'angle $\widehat{FEG}$, on va utiliser le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.
$\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $(-1\,;\,-2\,;\,5)$ et $\overrightarrow{EG}$ a pour coordonnées $(-3\,;\,2\,;\,4)$;
donc $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG} = -1\times(-3)+(-2)\times 2+5\times 4 = 19$
On sait aussi que $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos\widehat{FEG}$.
On calcule $EF^2 = 1+4+25 = 30$ donc $EF=\sqrt{30}$ et $EG^2 = 9+4+16 = 29$ donc $EG=\sqrt{29}$.

On a donc $\cos\widehat{FEG} = \dfrac{\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG}}{EF\times EG} = \dfrac{19}{\sqrt{30}\times\sqrt{29}} \approx 0,644$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\widehat{FEG} \approx 49,9\,°$ dont $50\,°$ est une valeur arrondie au degré près.

Exercice 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul. Soit (u_n) la suite définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 &=& a\\ u_{n+1} &=& \mathrm{e}^{2u_n}-\mathrm{e}^{u_n} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N} \end{array}\right.$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n}-1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-x$

a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-1$.
Or $\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left(2\mathrm{e}^{x}+1\right) = 2\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}-1 = 2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-1$
Donc $g'(x) = \left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left(2\mathrm{e}^{x}+1\right)$.

b) Les variations de la fonction g dépendent du signe de g' sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x}>0$ donc $2\mathrm{e}^{x}+1>0$; donc $g'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{x}-1$:
$\mathrm{e}^{x}-1>0 \iff \mathrm{e}^{x}>1 \iff x>0$
$g(0) = \mathrm{e}^{0}-\mathrm{e}^{0}-0 = 0$
La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$, strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et admet un minimum égal à 0 pour $x=0$.

c) $u_{n+1}-u_n = \mathrm{e}^{2u_n}-\mathrm{e}^{u_n}-u_n = g(u_n)$.
Or la fonction g a pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$ donc $g(u_n)\geqslant 0$ pour tout n et donc $u_{n+1}-u_n\geqslant 0$ pour tout n. La suite (u_n) est donc croissante.

2. Dans cette question, on suppose que $a\leqslant 0$.

a) Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n\leqslant 0$.

- $u_0 = a$; or $a\leqslant 0$ donc $u_0\leqslant 0$. La propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang p (où $p\geqslant 0$), c'est-à-dire $u_p\leqslant 0$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On sait que $u_{p+1} = \mathrm{e}^{u_p}\left(\mathrm{e}^{u_p}-1\right)$
  D'après l'hypothèse de récurrence, $u_p\leqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{u_p}\leqslant 1$ donc $\mathrm{e}^{u_p}-1\leqslant 0$.
  Comme $\mathrm{e}^{u_p}>0$ on déduit que $u_{p+1}\leqslant 0$ et la propriété est vraie au rang $p+1$.
- La propriété $u_n\leqslant 0$ est vraie en 0 ; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 0, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

c) La suite est croissante donc, pour tout n, $u_n \geqslant u_0$.
Si $a = 0$, $u_0 = 0$; comme, pour tout n, $u_n \geqslant u_0$ donc $u_n \geqslant 0$.
Or on a vu que, pour tout n, $u_n \leqslant 0$.
Donc pour tout n, $u_n = 0$.
On peut déduire que la suite (u_n) est constante et égale à 0 donc sa limite est 0.

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout n, $u_n \geqslant a$; comme $a > 0$, on peut en déduire que, pour tout n, $u_n > 0$.

a) On a vu que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.
Or $0 < a \leqslant u_n$ pour tout n ; on sait que la fonction g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc $g(0) < g(a) \leqslant g(u_n)$ et donc $g(u_n) \geqslant g(a)$ pour tout n.
On a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

b) Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

- Pour $n = 0$, $u_0 = a$ et $a + n \times g(a) = a + 0 = a$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang p (où $p \geqslant 0$), c'est-à-dire $u_p \geqslant a + p \times g(a)$; c'est l'hypothèse de récurrence.
  On sait que $u_{p+1} - u_p \geqslant g(a)$; or $u_p \geqslant a + p \times g(a)$ (HR). Donc $u_{p+1} \geqslant a = p \times g(a) + g(a)$ ce qui équivaut à $u_{p+1} \geqslant a + (p+1) \times g(a)$.
  La propriété est donc vraie au rang $p + 1$.
- La propriété $u_n \geqslant a + n \times g(a)$ est vraie en 0 ; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n.

c) $a > 0$ donc $g(a) > 0$ car 0 est le minimum de la fonction g, atteint en 0.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (n \times g(a)) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$
Comme $u_n \geqslant a + n \times g(a)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$, on peut déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif.

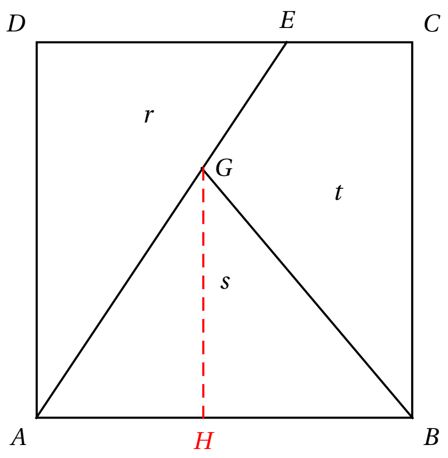
a) On complète l'algorithme :

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que $u \leqslant M$ u prend la valeur $\text{e}^{2u} - \text{e}^{u}$ n prend la valeur $n + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

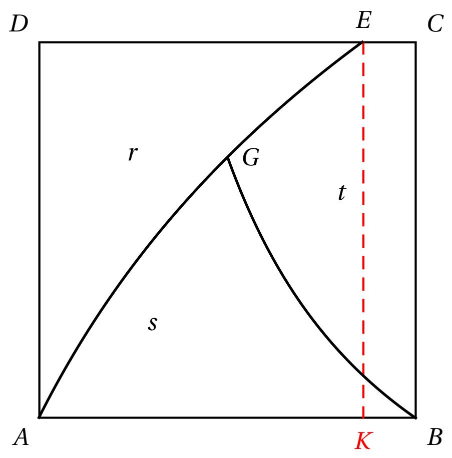
b) On suppose $M = 60$. On trouve à la calculatrice $u_{35} \approx 2,13$ et $u_{36} \approx 62,35$; donc la valeur affichée par l'algorithme pour $M = 60$ est 36.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité
Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\right)$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.

- Le point E est situé sur la droite (CD) donc son ordonnée vaut 1.
  Le nombre r est l'aire du triangle ADE qui est égale à $\dfrac{AD \times DE}{2}$.
  De plus, cette aire doit valoir $\dfrac{1}{3}$ et on sait que $AD = 1$.
  Donc $\dfrac{AD \times DE}{2} = \dfrac{1}{3}$ entraîne $DE = \dfrac{2}{3}$.
  Les coordonnées de E sont donc $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,1\right)$.
- Soit H le pied de la hauteur issue de G dans le triangle ABG ; donc GH est l'ordonnée du point G.
  L'aire s du triangle ABG est : $\dfrac{AB \times GH}{2}$. Or $AB = 1$ et $s = \dfrac{1}{3}$, donc : $\dfrac{1 \times GH}{2} = \dfrac{1}{3}$ donc $GH = \dfrac{2}{3}$.
  L'ordonnée y_G de G est $\dfrac{2}{3}$.
  Le point G est situé sur la droite (AE). Les points A et E ont pour coordonnées respectives $(0\,;\,0)$ et $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,1\right)$. Donc la droite (AE) a pour équation $y = \dfrac{3}{2}x$.
  $G \in (AE)$ d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$ donc $y_G = \dfrac{3}{2}x_G$. Comme $y_G = \dfrac{2}{3}$, on déduit que $x_G = \dfrac{4}{9}$.
  Le point G a pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{9}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

Partie B : étude de la proposition B

1. **a)** D'après le texte, l'ordonnée y_E du point E est égale à 1 et ce point appartient à $\mathscr{C}_f$ donc
   $f\left(x_E\right) = y_E \iff \ln\left(2x_E + 1\right) = 1 \iff 2x_E + 1 = \text{e} \iff x_E = \dfrac{\text{e} - 1}{2}$

   b) L'abscisse du point G vaut 0,5 et le point G appartient à $\mathscr{C}_f$; donc :
   $f\left(x_G\right) = y_G \iff f(0,5) = y_G \iff \ln 2 = y_G$
   Le point G appartient aussi à $\mathscr{C}_g$ donc :
   $g\left(x_G\right) = y_G \iff k\left(\dfrac{1 - x_G}{x_G}\right) = y_G \iff k\left(\dfrac{1 - 0,5}{0,5}\right) = \ln 2 \iff k = \ln 2$

2. **a)** Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = (x+0,5)\times\ln(2x+1) - x$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$F'(x) = 1\times\ln(2x+1) + (x+0,5)\times\dfrac{2}{2x+1} - 1 = \ln(2x+1)+1-1 = \ln(2x+1) = f(x)$
Donc f a pour primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Soit K le projeté orthogonal de E sur (AB). Comme le point E a pour abscisse $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$, et que la fonction f est positive, l'aire sous la courbe entre 0 et $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$ est donnée par :
$\displaystyle\int_0^{\frac{\mathrm{e}-1}{2}} f(x) = \,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{\frac{\mathrm{e}-1}{2}} = F\left(\frac{\mathrm{e}-1}{2}\right) - F(0) = \frac{\mathrm{e}}{2}\ln\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}-1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$
L'aire du rectangle $ADEK$ est $AD\times DE = 1\times\dfrac{\mathrm{e}-1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.
Donc $r = \dfrac{\mathrm{e}-1}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1$

3. $g(x) = \ln 2\times\dfrac{1-x}{x} = \ln 2\times\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$
Donc une primitive de g sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est donnée par : $G(x) = \ln 2\times(\ln x - x)$.

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que $s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2)-1}{2}$.
$r = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1 \approx 0,36 \in\,]\,0,3\,;0,4\,[$.
$s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2)-1}{2} \approx 0,33 \in\,]\,0,3\,;0,4\,[$
$t = 1 - r - s \approx 0,31 \in\,]\,0,3\,;0,4\,[$
Donc la proposition B vérifie les conditions imposées par le fabriquant.

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x,\ y,\ z)$ tels que $x^2+y^2=z^2$.
Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » et notés en abrégé « TP ».

Partie A : généralités

1. Soit $(x,\ y,\ z)$ un TP ; alors $x^2+y^2=z^2$. Soit p un entier naturel non nul.
Alors $p^2\times x^2 + p^2\times y^2 = p^2\times z^2$ ce qui équivaut à $(px)^2+(py)^2=(pz)^2$.
Donc $(px,\ py,\ pz)$ est aussi un TP.

2. Soit $(x,\ y,\ z)$ un TP.
On va utiliser deux résultats connus du cours : un nombre et son carré ont la même parité, et la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
$\left.\begin{array}{l} x \text{ impair} \Leftrightarrow x^2 \text{ impair}\\ y \text{ impair} \Leftrightarrow y^2 \text{ impair}\end{array}\right\} \Longrightarrow x^2+y^2 \text{ pair} \iff z^2 \text{ pair} \iff z \text{ pair}$
Donc x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance α de 2 par un entier impair k : $n = 2^\alpha\times k$

a) La décomposition en facteurs premiers de 192 est $2^6\times 3$; c'est aussi la *décomposition* de 192 au sens donné dans cet exercice.

b) Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les *décompositions* sont $x = 2^\alpha\times k$ et $z = 2^\beta\times m$.
$x = 2^\alpha\times k \Longrightarrow x^2 = 2^{2\alpha}\times k^2 \Longrightarrow 2x^2 = 2^{2\alpha+1}\times k^2$
$z = 2^\beta\times m \Longrightarrow z^2 = 2^{2\beta}\times m^2$

c) Pour que les deux nombres $2x^2$ et z^2 soient égaux, il faut et il suffit que leurs *décompositions* soient les mêmes (puisque cette *décomposition* est unique) ; l'un a pour *décomposition* $2^{\alpha+1}\times k^2$ et l'autre $2^{\beta}\times m^2$.

Ces deux décompositions ne peuvent être les mêmes car $2\alpha+1$ est impair et 2β est pair.

Donc il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,\ y,\ z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant : $x < y < z$.

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. $2\,015 = 5\times 13\times 31$; on en déduit que $2\,015 = 5\times 403$.

   On sait que $(3,\ 4,\ 5)$ est un TP donc, d'après la question **1.** $(3\times 403,\ 4\times 403,\ 5\times 403)$ est aussi un TP.

   Donc $(1\,209,\ 1\,612,\ 2\,015)$ est un TP.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $(2n+1)^2 + \left(2n^2+2n\right)^2 = \left(2n^2+2n+1\right)^2$.

   Si $2n+1 = 2\,015$, alors $n = 1\,007$.

   Pour $n = 1\,007$, on a : $(2n^2+2n)^2 = 2\,030\,112$ et $(2n^2+2n+1)^2+1 = 2\,030\,113$.

   Donc $(2\,015,\ 2\,030\,112,\ 2\,030\,113)$ est un TP.

3. **a)** On cherche deux entiers x et z tels que : $z^2 - x^2 = 403^2 \iff (z-x)(z+x) = 403^2$; or $403^2 = 169\times 961$. Donc $z^2 - x^2 = 403^2 \iff (z-x)(z+x) = 169\times 961$.

   Les nombres x et z tels que $\left\{\begin{array}{rcl} z-x &=& 169\\ z+x &=& 961\end{array}\right.$ répondent à la question.

   $$\left\{\begin{array}{rcl} z-x &=& 169\\ z+x &=& 961\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& 961-169\\ 2z &=& 169+961\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& 792\\ 2z &=& 1\,130\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 396\\ z &=& 565\end{array}\right.$$

   Donc $565^2 - 396^2 = 403^2$.

   b) D'après la question **B 3.a)** : $396^2 + 403^2 = 565^2$; on en déduit que $(396,\ 403,\ 565)$ est un TP.

   En multipliant par 5 on obtient le TP cherché : $(5\times 396,\ 5\times 403,\ 5\times 565) = (1\,980,\ 2\,015,\ 2825)$.