

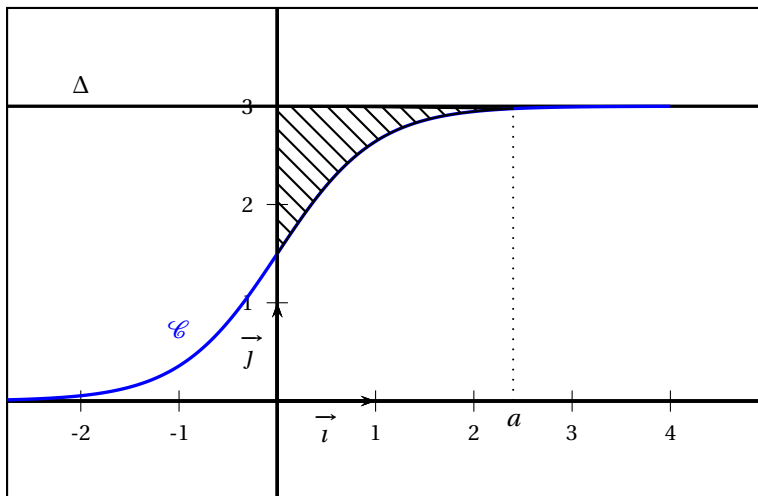
❧ Corrigé du baccalauréat S Pondichéry ❧  
17 avril 2015

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A



1. On sait que  $e^{-2x} > 0$  quel que soit le réel  $x$ , donc  $1 + e^{-2x} > 1 > 0$ . Le dénominateur étant non nul, la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sur cet intervalle la fonction étant de la forme  $\frac{3}{u(x)}$ , avec  $u(x) = 1 + e^{-2x}$ , donc  $u'(x) = -2e^{-2x}$  on a :

$$f'(x) = -\frac{3u'(x)}{(1+u(x))^2} = -\frac{3 \times (-2)e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{6e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2} > 0$$

car quotient de deux nombres supérieurs à zéro. la fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  (comme le laisse supposer le graphique).

2. On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$  et en posant  $X = -2x$ ,  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ , d'où

$\lim_{X \rightarrow -\infty} 1 + e^X = 1$  et enfin par quotient de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$  : ceci montre que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = 3$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  au voisinage de plus l'infini.

3. Sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , la fonction  $f$  est continue car dérivable, strictement croissante de  $f(0) = \frac{3}{1+1} = 1,5$  à  $3$  : il existe donc un réel unique  $\alpha \in [0; +\infty[$  tel que  $f(\alpha) = 2,999$ .

La calculatrice donne :

$$f(4) \approx 2,99899 \text{ et } f(5) \approx 2,9999, \text{ donc } 4 < \alpha < 5;$$

$$f(4,0) \approx 2,99899 \text{ et } f(4,1) \approx 2,9992, \text{ donc } 4,0 < \alpha < 4,1;$$

$$f(4,00) \approx 2,99899 \text{ et } f(4,01) \approx 2,99901, \text{ donc } 4,00 < \alpha < 4,01. \text{ (encadrement à } 10^{-2} \text{ près.)}$$

Partie B

1. On a vu dans la partie A que  $0 < f(x) < 3 \iff -f(x) < 0 < 3 - f(x)$ , soit  $h(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. La fonction  $H$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sur cet intervalle :

$$H'(x) = -\frac{3}{2} \times \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x} + 3 - 3}{1+e^{-2x}} = \frac{3e^{-2x} + 3}{1+e^{-2x}} - \frac{3}{1+e^{-2x}} = \frac{3(e^{-2x} + 1)}{1+e^{-2x}} - \frac{3}{1+e^{-2x}} = 3 - f(x) = h(x).$$

Donc  $H$  est une primitive de  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. a. On a vu que sur  $\mathbb{R}$  donc en particulier sur l'intervalle  $[0 ; a]$  (avec  $a >$ ), la fonction  $h$  est positive, donc l'intégrale  $\int_0^a h(x) dx$  est égale en unités d'aire à la mesure de la surface limitée par la représentation graphique de  $h$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = a$ .

Mais comme  $h(x) = 3 - f(x)$ , cette surface est la surface limitée par la droite  $\Delta$ , la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = a$  (voir l'aire hachurée ci-dessus).

- b. D'après la question B. 2., on a :

$$\int_0^a h(x) dx = [H(x)]_0^a = H(a) - H(0) = -\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2 \times a}) + \frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2 \times 0}) = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2 \times a}) = \frac{3}{2} \ln \left( \frac{2}{1 + e^{-2a}} \right).$$

- c. D'après la question précédente, on sait que l'aire de  $\mathcal{D}_a$ , surface limitée par la droite  $\Delta$ , la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = a$  est égale à  $\frac{3}{2} \ln \left( \frac{2}{1 + e^{-2a}} \right)$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{1 + e^{-2x}} \right) = 2$ , donc finalement par composition, l'aire de  $\mathcal{D}$  est égale à  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \ln \left( \frac{2}{1 + e^{-2x}} \right) = \frac{3}{2} \ln 2 \approx 1,04$  (u. a.)

## EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

### Partie A

1. On a pour tout naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} =$

$$au_n + \frac{b(1-a) - b}{1-a} = au_n - a \frac{b}{1-a} = a \left[ u_n - \frac{b}{1-a} \right] = av_n.$$

L'égalité  $v_{n+1} = av_n$ , vraie pour tout naturel  $n$  montre que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $a$ .

2. On sait que  $v_n = v_0 \times a^n$ ; donc si  $a \in ]-1 ; 1[$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \frac{b}{1-a} \text{ soit } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{b}{1-a}.$$

### Partie B

1. Après la taille la plante mesure  $80 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 80 \times \frac{3}{4} = 60$  (cm). Au bout de 1 an elle a poussé de 30 cm; elle mesurera donc en mars 2016 avant la tailles  $60 + 30 = 90$  cm.

2. a. D'une année sur l'autre, tailler le quart revient à multiplier par  $\frac{3}{4} = 0,75$  et la pousse annuelle est de 30 cm, donc :

$$h_{n+1} = 0,75h_n + 30.$$

- b. Mars 2015 correspondant à  $n = 0$ , on a :  $h_0 = 80$  ;  $h_1 = 90$ ,  
 $h_2 = 0,75 \times 90 + 30 = 67,5 + 30 = 97,5$  : la suite semble être croissante.  
*Initialisation* : on sait déjà que  $h_0 < h_1$  ;  
*Hérédité* : supposons qu'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $h_p < h_{p+1}$ , alors  
 $0,75h_p < 0,75h_{p+1} \iff 0,75h_p + 30 < 0,75h_{p+1} + 30 \iff h_{p+1} < h_{p+2}$  :  
l'hérédité est démontrée, donc la suite  $(h_n)$  est croissante.
- c. Si la suite  $(h_n)$  converge vers  $\ell$ , par continuité l'égalité :  
 $h_{p+1} = 0,75h_p + 30$  donne en passant aux limites à l'infini :  
 $\ell = 0,75\ell + 30 \iff 0,25\ell = 30 \iff \ell = 120$ .  
La plante aura donc une taille inférieure à 120 cm. (À la calculatrice  
 $h_{20} \approx 119,873$  cm).  
On utilise le résultat de la partie A avec la suite  $(h_n)$  et les coefficients  
 $a = 0,75$  et  $b = 30$ .  
Comme  $-1 < 0,75 < 1$ , la suite  $(h_n)$  converge vers  $\frac{b}{1-a} = \frac{30}{1-0,75} = \frac{30}{0,25} =$   
120.

**EXERCICE 3****6 points****Commun à tous les candidats****Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment****Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager**

- Par symétrie  $P(104 \leq X) = 0,16$  et donc  $P(64 \leq X \leq 104) = 1 - 2 \times 0,16 = 1 - 0,32 = 0,68$ .
  - On vient donc de trouver que  $P(\mu - 20 \leq X \leq \mu + 20) = 0,68$  : donc  $\sigma \approx 20$ .
- La variable  $Z$  est centrée et réduite : elle suit donc une loi normale centrée réduite.
  - On part de  $P(X \leq 64) = 0,16$ , d'où  $P(X \leq 64) = P(X - 84 \leq -20) =$   
 $P\left(\frac{X - 84}{\sigma} \leq \frac{-20}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq -\frac{20}{\sigma}\right)$ .  
Finalement  $P\left(Z \leq -\frac{20}{\sigma}\right) = 0,16$
  - Le résultat précédent entraîne que  $-\frac{20}{\sigma} \approx -0,9945 \iff \sigma \approx \frac{20}{0,9945}$  soit  
 $\sigma \approx 20,111$  à  $10^{-3}$  près.
- Dans cette question, on considère que  $\sigma = 20,1$ .
  - Il faut trouver :  
 $P(24 \leq X \leq 60) \approx 0,115$  (calculatrice)
  - On a  $P(X \geq 120) = 0,5 - P(84 \leq X \leq 120) \approx 0,037$ .

**Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro**

- Si  $G$  est la variable aléatoire donnant le nombre de clients ayant pris l'extension de garantie, puisque les tirages sont indépendants et de même probabilité 0,115,  $G$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(12, 0,115)$ .  
La probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie est égale à :  
 $P(G = 3) = \binom{12}{3} \times 0,115^3 \times (1 - 0,115)^9 \approx 0,1114$  soit 0,111 au millième près.
  - On a  $P(G \geq 6) = 1 - P(G \leq 5) \approx 0,001$  au millième près.

2. • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est  $65 - 399 = -334$  ;  
 • Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65

- a. • Si le client utilise l'extension le gain algébrique est  $65 - 399 = -334$  ;  
 • Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65.

La variable aléatoire  $Y$  prend donc deux valeurs 65 et  $-334$  avec les probabilités respectives 0,885 et 0,115.

- b. On a  $E(Y) = 65 \times 0,885 + (-334) \times 0,115 = 19,115 \approx 19,12$  € au centime près. L'offre est donc avantageuse pour l'entreprise puisque celle gagne presque 20 € par client.

**EXERCICE 4****5 points****Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ , on considère les points M, N et P de coordonnées

respectives  $M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right)$ ,  $N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ ,  $P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$ .

1. Voir la figure à la fin.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{MP}$ .  $\overrightarrow{MN} \left(-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$  et  $\overrightarrow{MP} \left(0; -1; -2\right)$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{MP}$  ne sont pas colinéaires, les droites (MN) et (MP) ne sont pas parallèles donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

3. a.  $-1 \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) + \left(\frac{1}{4}\right) \times (-2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
- b. L'algorithme 1 calcule le produit scalaire  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$ , donc les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (MN) et (MP) sont perpendiculaires : le triangle MNP est donc rectangle en M.

4.

5. a. Si  $n$  est un vecteur normal au plan (MNP) une équation de celui-ci est :  
 $5x - 8y + 4z = d$ , avec  $d \in \mathbb{R}$  ;

$$N \in (\text{MNP}) \iff -8 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 = d \iff 0 = d$$

Une équation cartésienne du plan (MNP) est donc  $5x - 8y + 4z = 0$ .

- b. On traduit la relation vectorielle :  $M(x; y; z) \in \Delta \iff \overrightarrow{FM} = t\vec{n}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  soit

$$\begin{cases} x-1 &= 5t \\ y-0 &= -8t \\ z-1 &= 4t \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 1+5t \\ y &= -8t \\ z &= 1+4t \end{cases}$$

6. a. Les coordonnées de K vérifient l'équation du plan et l'équation paramétrique de  $\Delta$ , soit :

$$\begin{cases} 5x - 8y + 4z &= 0 \\ x &= 1 + 5t \\ y &= -8t \\ z &= 1 + 4t \end{cases} \Rightarrow 5(1 + 5t) - 8 \times (-8t) + 4(1 + 4t) = 0 \iff$$

$$105t + 9 = 0 \iff t = -\frac{9}{105} \iff t = -\frac{3}{35}.$$

$$\text{D'où } x = 1 + 5 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7};$$

$$y = -8 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = \frac{24}{35};$$

$$z = 1 + 4 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = 1 - \frac{12}{35} = \frac{23}{35}.$$

$$\text{Donc } F\left(\frac{4}{7}; \frac{24}{35}; \frac{23}{35}\right).$$

- b. Puisque (FK) est orthogonale au plan MNP, [FK] est hauteur du tétraèdre MNPF, donc

$$V_{\text{MNPF}} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(\text{MNP} \times \text{FK}).$$

$$\text{Or MNP est rectangle en M, donc } \mathcal{A}(\text{MNP}) = \frac{\text{MN} \times \text{MP}}{2}.$$

$$\text{MN}^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{21}{16} \Rightarrow \text{MN} = \frac{\sqrt{21}}{4};$$

$$\text{MP}^2 = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \text{MP} = \sqrt{5};$$

$$\text{Donc } V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{4} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{\frac{27}{35}} = \frac{1}{24} \times \sqrt{\frac{21 \times 27}{35}} \times \sqrt{5} =$$

$$\frac{1}{24} \times \sqrt{\frac{81}{5}} \times \sqrt{5} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

## EXERCICE 4

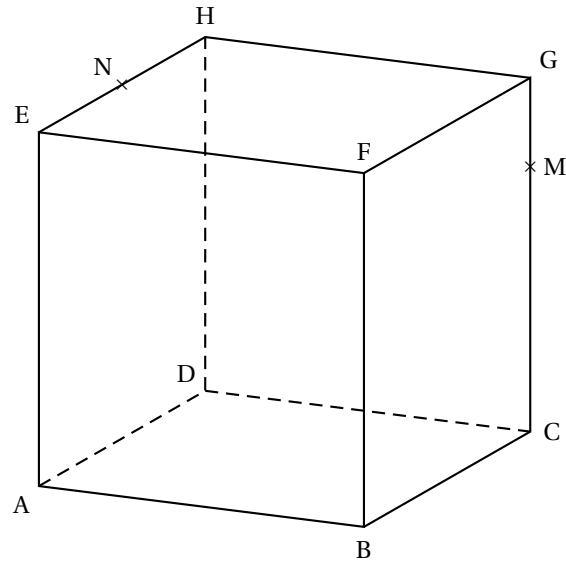
5 points

## Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Voir le cours.
2. On considère le nombre de Mersenne  $2^{33} - 1$ .
  - a. Si 3 divise  $2^{33} - 1$  et 4 divise  $2^{33} - 1$ , comme 3 et 4 sont premiers entre eux, d'après le 1. 12 devrait diviser  $2^{33} - 1$  ce qui est contradictoire avec ce que dit l'élève : il a donc tort.
  - b.  $2^{33}$  est un naturel pair donc  $2^{33} - 1$  est impair donc 4 ne peut le diviser.
  - c.  $2 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 2^3 \equiv (-1)^3 \pmod{3} \Leftrightarrow 2^3 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow (2^3)^{11} \equiv (-1)^{11} \pmod{3} \Leftrightarrow 2^{33} \equiv -1 \pmod{3}$  ce qui montre que 3 ne divise pas  $2^{33} - 1$ .
  - d.  $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \dots + (2^3)^{10}$ ;  
 $2^3 S = 2^3 + 2^4 + (2^3)^3 + (2^3)^3 + \dots + (2^3)^{11}$ , d'où par différence :  
 $7S = (2^3)^{11} - 1 \Leftrightarrow S = \frac{(2^3)^{11} - 1}{7}$ .
  - e. S est une somme d'entiers naturel donc est un entier naturel ; le résultat précédent montre que  $(2^3)^{11} - 1$  est donc un multiple de 7.  
 Finalement  $2^{33} - 1$  est divisible par 7.
3.  $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$ .  
 Ce nombre n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7 (dans la division reste 1), ni par 11 (dans la division reste 7), ni par 13 (dans la division reste 10) et comme  $13^2 = 169$ , il est inutile de continuer : 127 est premier.
4. a. Comme on vient de le voir pour 127, l'algorithme cherche le reste de la division de  $2^{33} - 1$  par les naturels 2, 3, 4, etc.,  $k \leq \sqrt{2^n - 1}$  tant que le reste est non nul.  
 Or on a vu que le nombre  $2^{33} - 1$  est divisible par 7, donc l'algorithme va afficher ce diviseur 7 et « CAS 2 ».  
 En effet  $2^{33} - 1$  n'est pas multiple de 5 :  
 $2^{11} = 2048$  et  $2048 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow (2^{11})^3 \equiv 3^3 \pmod{5}$ , mais  $3^3 = 27 \equiv 2 \pmod{5}$ , donc  $2^{33} \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 2^{33} - 1 \equiv 1 \pmod{5}$ .  
 Si on entre  $n = 7$ , l'algorithme affiche 12 et « CAS 1 ».
- b. Le cas 2 concerne donc les nombres de Mersenne non premiers et le nombre  $k$  est le plus petit de ses diviseurs (différent de 1).
- c. Le CAS 1 concerne les nombres Mersenne premier comme  $2^7 - 1$ .

## ANNEXE à remettre avec la copie

## EXERCICE 4 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



P ×

## Algorithme 1

```

Saisir  $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$ 
 $d$  prend la valeur  $x_N - x_M$ 
 $e$  prend la valeur  $y_N - y_M$ 
 $f$  prend la valeur  $z_N - z_M$ 
 $g$  prend la valeur  $x_P - x_M$ 
 $h$  prend la valeur  $y_P - y_M$ 
 $i$  prend la valeur  $z_P - z_M$ 
 $k$  prend la valeur  $d \times g + e \times h + f \times i$ 
Afficher  $k$ 

```

## Algorithme 2 (à compléter)

```

Saisir  $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$ 
 $d$  prend la valeur  $x_N - x_M$ 
 $e$  prend la valeur  $y_N - y_M$ 
 $f$  prend la valeur  $z_N - z_M$ 
 $g$  prend la valeur  $x_P - x_M$ 
 $h$  prend la valeur  $y_P - y_M$ 
 $i$  prend la valeur  $z_P - z_M$ 
 $k$  prend la valeur  $d \times g + e \times h + f \times i$ 
 $l$  prend la valeur  $d^2 + e^2 + f^2$ 
 $m$  prend la valeur  $g^2 + h^2 + i^2$ 
Si  $k = 0$  et si  $l = m$ 
    Afficher : « Le triangle MNP
est rectangle isocèle en M »
Sinon Afficher : « Le triangle MNP
n'est pas rectangle ou n'est pas iso-
cèle en M »

```