ꕥ Baccalauréat S Amérique du Nord Correction ꕥ
30 mai 2014

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie A : Conditionnement des pots

1. On veut $p(X \leqslant 49)$. Avec la calculatrice $p(X \leqslant 49) \approx 0.202$.
2. On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{X-50}{\sigma'}$
   a. La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite.
   b. Une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0{,}06$ est $u \approx -1.555$.
   c. $Z = \dfrac{X-50}{\sigma'} \Leftrightarrow X = \sigma' Z + 50$
   $p(X \leqslant 49) = 0{,}06 \Leftrightarrow p\left(\sigma' Z + 50 \leqslant 49\right) = 0{,}06 \Leftrightarrow p\left(Z \leqslant -\dfrac{1}{\sigma'}\right) = 0{,}06$
   On doit donc avoir $-\dfrac{1}{\sigma'} = -1{,}555 \Leftrightarrow \sigma' = \dfrac{1}{1{,}555} \approx 0{,}643$
   La valeur attendue de σ' est donc 0,643.
3. **a.** Ici, l'épreuve de Bernoulli consiste à tester si un pot est non conforme considéré comme succès de probabilité 0,06,... ou pas.
   On répète 50 fois cette épreuve. Y suit donc la loi binomiale de paramètres 50 et 0,06.
   b. On calcule $p(Y \leqslant 2)$ avec la calculatrice. La probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes est d'environ 0,416.

Partie B : Campagne publicitaire

On a $n = 140 > 30$, $f = \dfrac{99}{140}$ donc $nf = 99 > 5$ et $n(1-f) = 41 > 5$. Ainsi, $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ soit $[0{,}622; 0{,}792]$ est donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$,
   $g(x) = 5\text{e}^{-x} - 3\text{e}^{-2x} = \text{e}^{-x}(5 - 3\text{e}^{-x})$.
   Comme $\text{e}^{-x} > 0$ (exponentielle), $g(x)$ est du signe de $5 - 3\text{e}^{-x}$.
   $5 - 3\text{e}^{-x} > 0 \Leftrightarrow 5 > 3\text{e}^{-x} \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} > \text{e}^{-x} \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{5}{3}\right) > -x \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < x$ ce qui est toujours vrai car
   $\ln\left(\dfrac{3}{5}\right) < 0 < x$.
   Finalement, pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $g(x) > 0$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont un point commun d'abscisse x si et seulement si $f(x) = x - 3$ soit $g(x) = 0$ ce qui n'est pas possible car on vient de voir que $g(x) > 0$.
   La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

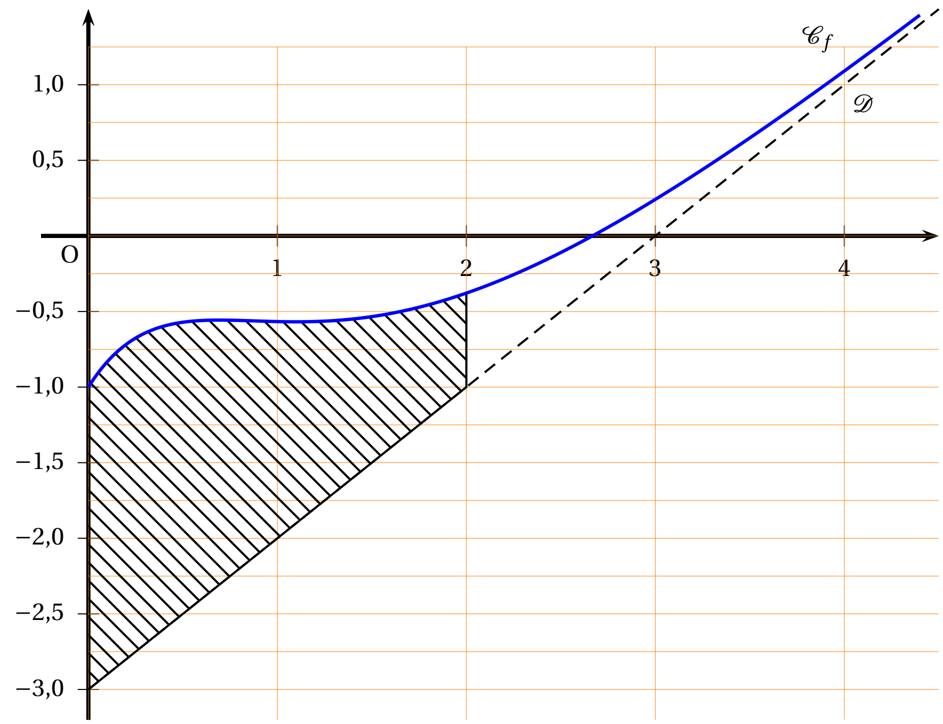
1. Comme M et N ont la même abscisse, pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$,
$MN = |f(x) - (x-3)| = |g(x)| = g(x)$ car $g(x) > 0$ d'après la première question.
2. Si u est dérivable,$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$.
La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est donc $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ et celle de $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est $x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x}$.
Pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $g'(x) = -5\mathrm{e}^{-x} + 2 \times 3\mathrm{e}^{-2x} = 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x}$.
3. g étant dérivable sur $[0~;~+\infty[$, on étudie le signe de sa dérivée sur $[0~;~+\infty[$.
Pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$,
$$\begin{array}{lll} g'(x) \geqslant 0 & \Leftrightarrow 6\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 & \\ & \Leftrightarrow 6\mathrm{e}^{-x} - 5 \geqslant 0 & \text{on a divisé par } \mathrm{e}^{-x} > 0 \\ & \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \geqslant \dfrac{5}{6} & \\ & \Leftrightarrow -x \geqslant \ln\left(\dfrac{5}{6}\right) & \text{croissance de la fonction } \ln \\ & \Leftrightarrow x \leqslant \ln\left(\dfrac{6}{5}\right) & \end{array}$$
En $\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$, la dérivée s'annule en changeant de signe $(+;-)$, donc $g\left(\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\right)$ est un maximum pour g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
$g\left(\ln\left(\dfrac{6}{5}\right)\right) = 5 \times \mathrm{e}^{\frac{5}{6}} - 3 \times \left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)^2 = 5 \times \dfrac{5}{6} - 3 \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{75}{36}$
La distance entre un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ et le point de même abscisse sur la droite $\mathscr{D}$ est donc maximale lorsque $x = \ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$. Cette distance maximale vaut $\dfrac{75}{36}$ unités.
Remarque : Comme le repère est orthogonal (à priori pas orthonormé), il s'agit d'unité en ordonnée.)

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$\mathscr{A}(x) = \int_0^x [f(t) - (t-3)]\,\mathrm{d}t.$$

1. $\mathscr{A}(2) = \displaystyle\int_0^2 [f(t) - (t-3)]\,\mathrm{d}t = \int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t$ et $g > 0$ sur $[0;2]$. $\mathscr{A}(2)$ mesure donc (en unités d'aires) l'aire du domaine limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = 2$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$.
(voir figure page suivante)
2. La fonction g est continue sur $[0;+\infty[$ et $\mathscr{A}(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, la fonction $\mathscr{A}$ est donc dérivable sur $[0;+\infty[$ et $\mathscr{A}' = g > 0$. La fonction $\mathscr{A}$ est donc bien croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif,
$$\begin{array}{lll} \mathscr{A}(x) & = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t & \\ & = 5\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - 3\int_0^x \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t & \text{par linéarité de l'intégrale} \\ & = 5\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x - 3\left[-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^x & \\ & = 5\left(-\mathrm{e}^{-x} + 1\right) - 3\left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2}\right) & \\ & = 5 - 5\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{3}{2} & \\ \mathscr{A}(x) & = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{7}{2} & \end{array}$$



4. $\mathscr{A}(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{7}{2} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{3}{2} = 0$

On pose $X = \mathrm{e}^{-x}$

$$\begin{array}{lll}
x \text{ solution de } \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 5\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{3}{2} = 0 & \Leftrightarrow X \text{ solution de } \dfrac{3}{2}X^2 - 5X + \dfrac{3}{2} = 0 & \\
 & \Leftrightarrow X \text{ solution de } 3X^2 - 10X + 3 = 0 & \text{équation du second degré} \\
 & \Leftrightarrow X = \dfrac{1}{3} \text{ ou } X = 3 & \\
 & \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{3} \text{ ou } \mathrm{e}^{-x} = 3 & \text{on revient à } x \text{ et } X = \mathrm{e}^{-x} \\
 & \Leftrightarrow x = \ln 3 \text{ ou } x = -\ln 3 & -\ln\dfrac{1}{3} = -(-\ln 3) = \ln 3 \\
 & \Leftrightarrow x = \ln 3 & \text{car } x \geqslant 0 \text{ et } -\ln 3 < 0
\end{array}$$

Finalement, $\mathscr{A}(x) = 2 \Leftrightarrow x = \ln 3$.

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

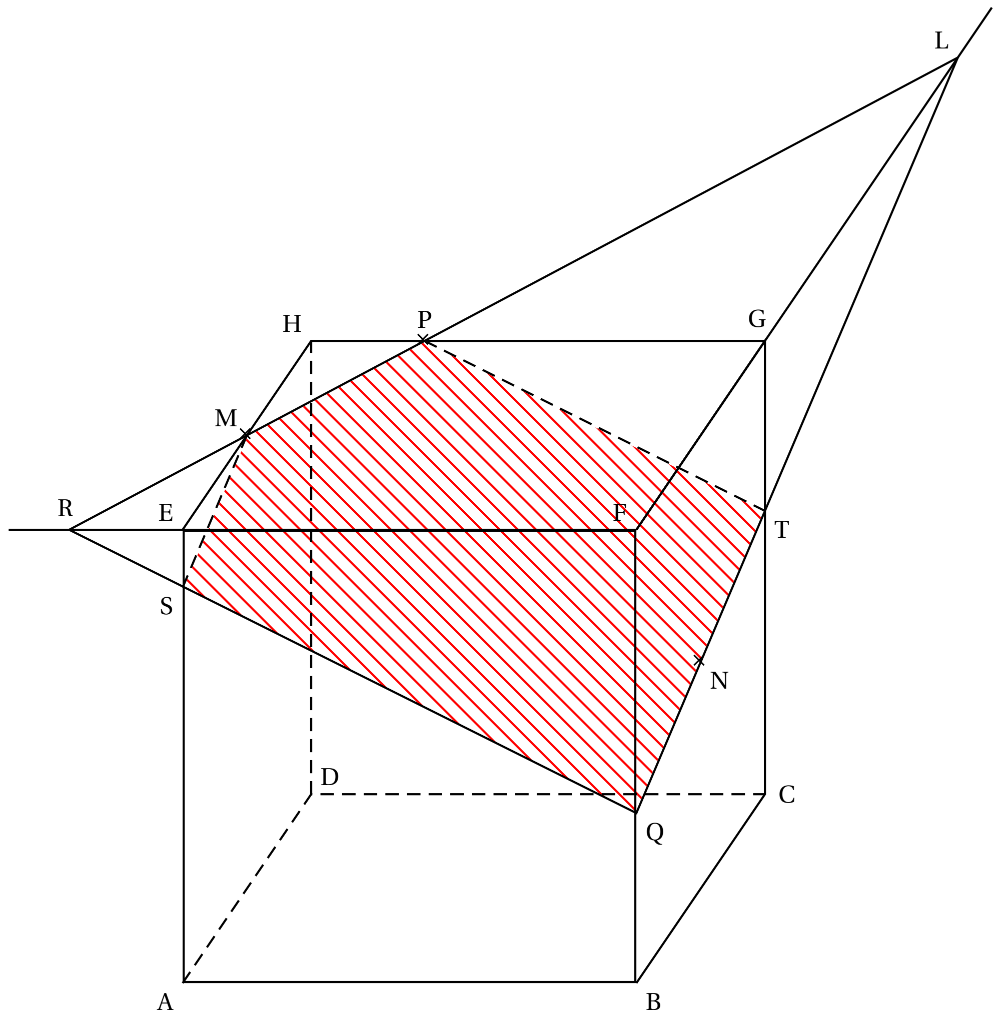
Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Dans le plan (EFG), les droites (PM) et (FG) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes ; on appelle L leur point d'intersection.
2. **a.** Les droites (LN), (BF) et (CG) sont coplanaires dans le plan (BCG) d'où les constructions de T et Q.

   b. On cherche l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

$$\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r} L \in (MP) \Longrightarrow L \in (MNP) \\ N \in (MNP) \end{array}\right\} \Longrightarrow (LN) \subset (MNP) \\
Q \in (LN)
\end{array}\right\} \Longrightarrow Q \in (MNP) \\
Q \in [BF] \Longrightarrow Q \in (ABF)
\end{array}\right\} \Longrightarrow Q \in (MNP) \cap (ABF)$$

   Les droites (MP) et (EF) du plan (EFG) ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes ; on appelle R leur point d'intersection.



$$\left.\begin{array}{r} R \in (MP) \Longrightarrow R \in (MNP) \\ R \in (EF) \Longrightarrow R \in (ABF) \end{array}\right\} \Longrightarrow R \in (MNP) \cap (ABF)$$

Les plans (MNP) et (ABF) ont deux points en commun, Q et R ; ils ne sont pas confondus car $P \in (MNP)$ et $P \notin (ABF)$.

Ces deux plans sont donc sécants et comme Q et R appartiennent aux deux plans, l'intersection des deux plans (MNP) et (ABF) est la droite (QR).

3. Notons S le point d'intersection de (AE) et (QR).
   La section du cube par le plan (MNP) est le pentagone $MPTQS$.

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On a $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$, $G(1\,;\,1\,;\,1)$ et $H(0\,;\,1\,;\,1)$.

1. M est le milieu du segment $[EH]$ donc M a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+0}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{1+1}{2}\right) = \left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$;

   N est le milieu du segment $[FC]$ donc n a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+1}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{1+0}{2}\right) = \left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$;

   $P(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifie $\overrightarrow{HP} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{HG}$, on a donc : $\left\{\begin{array}{l} x - 0 = \dfrac{1}{4} \\ y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{4} \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$ Donc $P\left(\dfrac{1}{4}\,;1\,;1\right)$.

2. Pour calculer les coordonnées du point L, on écrit les systèmes de représentations paramétriques des droites (MP) et (FG).

(MP) passe par $M\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{MP}\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

Une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}k \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \\ z = 1 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{R}$

(FG) passe par $F(1\,;\,0\,;\,1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{FG}\,(0\,;\,1\,;\,0)$.

Une représentation paramétrique de cette droite est donc : $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = k' \\ z = 1 \end{array}\right.$ où $k' \in \mathbb{R}$

On détermine l'intersection de ces deux droites :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{4}k & = 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k & = k' \\ 1 & = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} k & = 4 \\ k' & = \frac{5}{2} \end{array}\right.$$

Donc le point L a pour coordonnées $\left(1\,;\,\frac{5}{2}\,;\,1\right)$.

3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\frac{5}{8}\right)$.

On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{TP}.\overrightarrow{TN}$

$$\overrightarrow{TP}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}.\overrightarrow{TN}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = -\frac{3}{4} \times 0 + 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{8} \times \left(-\frac{1}{8}\right) \neq 0$$

Le triangle TPN n'est pas rectangle en T.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

1. « Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B. » donc

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_n + b_n = 2200$.

2. Au début du $n+1$-ième jour, la bassin A contient a_n, on ajoute 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B soit $0{,}15b_n$ et on enlève 10 % du volume présent dans A au début de la journée :

$a_{n+1} = a_n + 0{,}15b_n - 0{,}1a_n = a_n + 0{,}15(2200 - a_n) - 0{,}1a_n = 0{,}75a_n + 330 = \frac{3}{4}a_n + 330$

On a bien, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3.

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1\,100$, faire :
		Affecter à a la valeur $\frac{3}{4}a + 330$
		Affecter à n la valeur $n+1$
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. **a.** Remarque : on peut calculer les premiers termes pour avoir la raison.

Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 1320 && \text{définition de } u_n \\ &= \frac{3}{4}a_n + 330 - 1320 && \text{question 2.} \\ &= \frac{3}{4}a_n - 990 \\ &= \frac{3}{4}(a_n - 1320) \\ &= \frac{3}{4}u_n && \text{définition de } u_n \end{aligned}$$

On reconnait la définition d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

Son premier terme est $u_0 = a_0 - 1320 = 800 - 1320 = -520$

b. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Mais, par définition de u_n, on a

$u_n = a_n - 1320 \Leftrightarrow a_n = u_n + 1320$ donc $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Si ce jour arrive, on aura $a_n = b_n = \frac{2200}{2} = 1100$.

Il faut donc résoudre l'équation $1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100$ d'inconnue n.

$1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100 \Leftrightarrow 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 220 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{11}{26} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{11}{26}\right)$

Finalement $n = \dfrac{\ln\left(\frac{11}{26}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 2{,}99$

On vérifie : $a_3 = 1\,100{,}625$ et $b_3 = 1\,099{,}375$ donc $a_3 - b_3 = 1{,}25 > 1$.

Les deux bassins n'auront donc jamais le même volume d'eau, à un mètre cube près.

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. La conservation du volume total se traduit par : pour tout entier naturel n, $a_n + b_n = 2200$.

2. D'après le texte, on peut dire que : $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}15b_n - 5 \\ b_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}85b_n + 5 \end{cases}$ avec $\begin{cases} a_0 = 1\,100 \\ b_0 = 1\,100 \end{cases}$

On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins.

On donne les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul du texte :

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1100,00	1100,00
3	1	`= B2 * 0.9 + C2 * 0.15 - 5`	`= B2 * 0.1 + C2 * 0.85 + 5`
4	2	1 187,50	1 012,50
5	3	1 215,63	984,38
6	...	...	...

3. La suite (a_n) donnant le volume d'eau dans le bassin A semble croissante et tendre vers 1 300, tandis que la suite (b_n) donnant le volume d'eau dans le bassin B semble décroissante et tendre vers 900.

Partie B

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix}0,9 & 0,15\\0,1 & 0,85\end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $R = \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$.
On admet que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n + R$.

1. On note $S = \begin{pmatrix}1300\\900\end{pmatrix}$.

$MS = \begin{pmatrix}0,9 & 0,15\\0,1 & 0,85\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1300\\900\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,9\times 1300 + 0,15\times 900\\0,1\times 1300 + 0,85\times 900\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1305\\895\end{pmatrix}$

$MS + R = \begin{pmatrix}1305\\895\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1300\\900\end{pmatrix} = S$

On a $X_{n+1} = MX_n + R$ et $S = MS + R$; par soustraction membre à membre, on obtient :
$X_{n+1} - S = MX_n + R - MS - R = MX_n - MS = M(X_n - S)$

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n :

$$X_n - S = M^n\,(X_0 - S) \text{ et que } M^n = \begin{pmatrix}0,6+0,4\times 0,75^n & 0,6-0,6\times 0,75^n\\0,4-0,4\times 0,75^n & 0,4+0,6\times 0,75^n\end{pmatrix}$$

2. $X_0 = \begin{pmatrix}1100\\1100\end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix}1300\\900\end{pmatrix}$ donc $X_0 - S = \begin{pmatrix}-200\\200\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M^n \times (X_0 - S) &= \begin{pmatrix}0,6+0,4\times 0,75^n & 0,6-0,6\times 0,75^n\\0,4-0,4\times 0,75^n & 0,4+0,6\times 0,75^n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-200\\200\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(0,6+0,4\times 0,75^n)\times(-200) + (0,6-0,6\times 0,75^n)\times 200\\(0,4-0,4\times 0,75^n)\times(-200) + (0,4+0,6\times 0,75^n)\times 200\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-200\times 0,75^n\\200\times 0,75^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc $X_n = M^n \times (X_0 - S) + S = \begin{pmatrix}-200\times 0,75^n\\200\times 0,75^n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1320\\900\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1320-200\times 0,75^n\\900+200\times 0,75^n\end{pmatrix}$

3. $X_n = \begin{pmatrix}1320-200\times 0,75^n\\900+200\times 0,75^n\end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}a_n = 1300-200\times 0,75^n\\b_n = 900+200\times 0,75^n\end{cases}$

La suite $(0,75^n)$ est géométrique de raison 0,75 donc est décroissante ; on multiplie par un nombre négatif, donc la suite $(-200\times 0,75^n)$ est croissante et donc la suite (a_n) est croissante.

De plus, $-1 < 0,75 < 1$ donc la suite $(0,75^n)$ est convergente et a pour limite 0. On peut en déduire que la suite (a_n) est convergente et a pour limite 1320.

Pour les mêmes raisons, on peut dire que la suite (b_n) est décroissante, et convergente vers 900.

4. On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie $1300 - a_n < 1,5$ et $b_n - 900 < 1,5$; $1300 - a_n < 1,5 \iff 1298,5 < a_n$

D'après le tableau fourni dans le texte, la plus petite valeur de n pour que le processus soit stabilisé peut être 17 ou 18.

Pour $n = 17$, $a_{17} \approx 1298,4966$ donc $1300 - a_{17} > 1,5$.

Pour $n = 18$, $a_{18} \approx 1298,8724$ donc $1300 - a_{18} < 1,5$.

Comme $a_n + b_n = 2200$, $b_n = 2200 - a_n$ ce qui équivaut à $b_n - 900 = 1300 - a_n$; donc $1300 - a_n < 1,5 \iff b_n - 900 < 1,5$.

On peut donc dire que le processus est stabilisé à partir de $n = 18$.