Terminale S Polynésie 7 juin 2013

Exercice 1 : **6 points**

Commun à tous les candidats

1. (a)
   - Les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $\left(0; f(0)\right)$ soit $(0\ ;\ 2)$.
   - Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
     On applique la règle du produit nul en sachant que $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$:
     $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
     Le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(-2\ ;\ 0)$.

   (b) **Remarque :** la fonction $(x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$ peut être considérée comme une fonction composée $x \mapsto -x$ suivie de l'exponentielle
   ou bien comme un quotient $\left(\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)$.

   $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty\end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

   La même stratégie menée en $+\infty$ conduit à la forme indéterminée « $+\infty \times 0$ » car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Mais, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}$.

   $$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0 \text{ théo. de croissance comparée}\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^{x}} = 0\end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

   L'axe des abscisses est donc asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

   (c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\mathrm{e}^{-x} = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $-(x+1)$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

2. (a) $1,642$

(b)

Variables :	k est un nombre entier
	N est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à N-1
	Affecter à S la valeur $S+\dfrac{1}{N}f\left(\dfrac{k}{N}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

3. (a) Sur $[0\ ;\ 1]$, f est continue et positive, donc l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire, est donnée par $\mathscr{A}=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a donc :
$\mathscr{A}=\left[g(t)\right]_0^1=g(1)-g(0)=-4\mathrm{e}^{-1}+3=3-\dfrac{4}{\mathrm{e}}$

(b) avec la calculatrice, $3-\dfrac{4}{\mathrm{e}}-1,642\approx 0,113$

Exercice 2 : **4 points**

Commun à tous les candidats

d - c - a- b

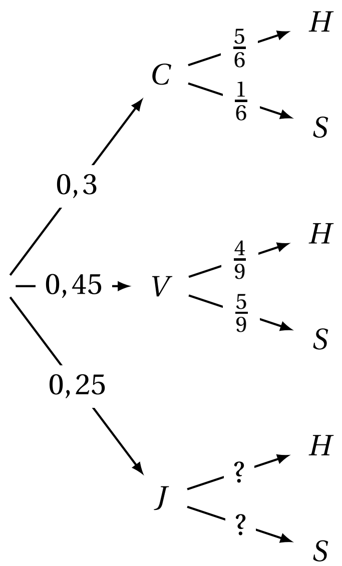
1. **(d) $\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$:**
$\left|\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|\,\mathrm{i}\,|\times|\,z_1\,|}{|\,z_2\,|}=\dfrac{1\times\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$
$\arg\left(\mathrm{i}\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\arg(\mathrm{i})+\arg(z_1)-\arg(z_2)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{13\pi}{12}$.
2. **(c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.**
Pour s'en convaincre, écrire les formes algébriques...
$-z=\overline{z}\Leftrightarrow -a-\mathrm{i}b=a-\mathrm{i}b\Leftrightarrow a=-a\Leftrightarrow a=0$
3. **(a)** $\left\{\begin{array}{l} x=-2t-1\\ y=3t\\ z=t+4\end{array}\right.\quad ,t\in\mathbb{R}$
Vecteur directeur : $\overrightarrow{AB}(-2\ ;\ 3\ ;\ 1)$ ce qui exclut la proposition (b).
De plus, C est le point de paramètre 0 dans la première représentation.
4. **(b) La droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathscr{P}$.**
La droite Δ est dirigée par $\overrightarrow{u}(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$.
$\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{n}=3-5+2=0$. Donc Δ et parallèle à $\mathscr{P}$: ne restent que (b) et (d).
On teste si un point de la droite est dans le plan : pour $t=0$, on a $A(-7;3;5)\in\Delta$.

Ensuite, $A \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}$ et $\vec{n}$ orthogonaux.
Or, $\overrightarrow{AD}(6\,;\,-1\,;\,-2)$ et $\overrightarrow{AD} \bullet \vec{n} = 18+5-2 \neq 0$. Donc $A \notin \mathscr{P}$

Exercice 3 : **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie 1



1. On veut $P(C \cap H) = P(C) \times P_C(H) = 0,3 \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{4}$.
2. On sait que $P(H) = \dfrac{13}{20}$.
   (a) Nous venons de calculer $P(C \cap H) = 0,25$ et
   $P(C) \times P(H) = 0,3 \times \dfrac{13}{20} = \dfrac{39}{200} \neq P(C \cap H)$
   Les évènements C et H ne sont pas indépendants.
   (b) d'après l'arbre, $P(H) = P(H \cap C) + P(H \cap V) + P(H \cap J)$.
   On a donc $P(J \cap H) = \dfrac{13}{20} - \dfrac{1}{4} - 0,45 \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{5}$
   et $P_J(H) = \dfrac{P(J \cap H)}{P(J)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{5}$.

Partie 2

1. On répète 60 fois, de façon indépendantes, l'expérience « choisir un morceau de musique » qui compte 2 issues :
   – « le morceau choisi est un morceau de musique classique » considéré comme succès, de probabilité $0,3$

– ou pas...
Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres 60 et $0,3$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60 est donc donné par :

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0,3 - 1,96\frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{60}}\ ;\ 0,3 + 1,96\frac{\sqrt{0,3 \times 0,7}}{\sqrt{60}}\right] \\ &= [0,184\,;0,416] \end{aligned}$$

2. La fréquence observée par Thomas est $\dfrac{12}{60} = 0,2$ est dans l'intervalle précédent. Donc NON, il n'y a pas de raison de penser que le baladeur est défectueux.

Partie 3

1. $P(180 \leqslant X \leqslant 220) = P(X \leq 220) - P(X \leq 180) \approx 0,841 - 0,159$. Réponse : $0,682$.
2. On veut $P(X > 4 \times 60) = 1 - P(X \leq 240) \approx 1 - 0,977$. Réponse : $0,023$.

Exercice 4 : **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité mathématiques

1. (a) $u_1 = \dfrac{3 \times u_0}{1 + 2u_0} = \dfrac{3 \times \frac{1}{2}}{1 + 2\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$

   et $u_2 = \dfrac{3 \times u_1}{1 + 2u_1} = \dfrac{3 \times \frac{3}{4}}{1 + 2\frac{3}{4}} = \dfrac{9}{10}$.

   (b) – Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $0 < u_n$.
   – Initialisation : Si $n = 0$
   Alors $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   – Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie (cà d $0 < u_k$). Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie aussi(cà d $0 < u_{k+1}$).
   Par hypothèse de récurrence $0 < u_k$ donc $0 < 3u_k$ et $0 < 1 + 2u_k$. ainsi, u_{k+1} est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $0 < u_{k+1}$ et $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

– $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, par récurrence on a bien pour tout entier naturel $n, 0 < u_n$.

2. (a) Comme pour tout entier naturel $n, 0 < u_n$, pour étudier les variations de la suite, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{u_n} = \frac{3}{1+2u_n}$$

Mais, $u_n < 1 \Leftrightarrow 2u_n < 2 \Leftrightarrow 1+2u_n < 3 \Leftrightarrow 1 < \dfrac{3}{1+2u_n}$ car $1+2u_n > 0$.

Finalement la suite (u_n) est croissante.

(b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 ; elle converge donc vers $\ell \leqslant 1$.

3. (a) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{\dfrac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3.

(b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 q^n = 3^n$.

(c) Pour tout entier naturel n,

$v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow (1-u_n)v_n = u_n \Leftrightarrow v_n = u_n + u_n v_n \Leftrightarrow u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n} \Leftrightarrow$

$u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

(d) Comme $3 > 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. L'étude du quotient conduit donc à une forme indéterminée.

$$u_n = \frac{3^n}{3^n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$$

Comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$, enfin, par quotient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

La suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 4 : **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques

1. (a) $U_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

   Or $\begin{cases} a_1 = 0,7a_0 + 0,2b_0 + 60 \\ b_1 = 0,1a_0 + 0,6b_0 + 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0,7 \times 300 + 0,2 \times 300 + 60 \\ b_1 = 0,1 \times 300 + 0,6 \times 300 + 70 \end{cases}$.

   Finalement $U_1 = \begin{pmatrix} 330 \\ 280 \end{pmatrix}$

   (b) Pour tout entier naturel n,

   $M \times U_n + P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7a_n + 0.2b_n \\ 0.1a_n + 0.6b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$

   Pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   $(I - M) = \begin{pmatrix} 1 - 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 1 - 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$.

   Puis

   $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 0,3 - 0,2 & 2 \times 0,3 - 3 \times 0,2 \\ -0,1 \times 4 + 0,4 & -0,1 \times 2 + 3 \times 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

   (b) On calcule $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times (I - M) = I$. Donc $I - M$ est inversible et son inverse est $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (c) $U = M \times U + P \Leftrightarrow U - M \times U = P \Leftrightarrow (I - M) \times U = P \Leftrightarrow U = (I - M)^{-1}P$

   Finalement $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix}$.

3. (a) Pour tout entier naturel n,

   $V_{n+1} = U_{n+1} - U = MU_n + P - (MU + P) = M(U_n - U) = M \times V_n$.

   (b) Par récurrence :

   – Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $V_n = M^n \times V_0$.
   – Initialisation : Si $n = 0$ alors
     $M^0 = I$ et $V_0 = M^0 V_0$. $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   – Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie (c.-à-d. $V_k = M^k \times V_0$). Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie aussi(cà d $V_{k+1} = M^{k+1} \times V_0$).
     $V_{k+1} = MV_k = M \times (M^k \times V_0) = M^{k+1} \times V_0$ et $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
   – $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, par récurrence on a bien pour tout entier naturel n, $V_n = M^n \times V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$V_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ \frac{-50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

   (a) Pour tout entier naturel n,

   $V_n = U_n - U \Leftrightarrow U_n = V_n + U \Leftrightarrow U_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n \\ \frac{-50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 380 \\ 270 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n + 380 \\ \frac{-50}{3} \times 0,8^n + \frac{140}{3} \times 0,5^n + 270 \end{pmatrix}$

   On en déduit donc $a_n = \frac{-100}{3} \times 0,8^n - \frac{140}{3} \times 0,5^n + 380$

   Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 380$

   (b) Le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme est donc de 380 000.