

Correction du baccalauréat S Asie 18 juin 2013

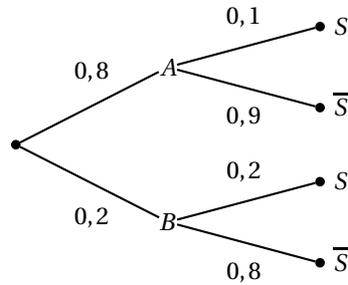
EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Le grossiste a deux fournisseurs et il y a dans chaque boîte des traces de pesticides ou non. On a donc un arbre 2×2 :



2. a. En suivant la quatrième branche :

$$p(B \cap \bar{S}) = p(B) \times p_B(\bar{S}) = 0,2 \times 0,8 = 0,16.$$

- b. On calcule de même :

$$p(A \cap \bar{S}) = p(A) \times p_A(\bar{S}) = 0,8 \times 0,9 = 0,72.$$

$\{A; B\}$ étant une partition de l'univers, on a donc :

$$p(\bar{S}) = p(A \cap \bar{S}) + p(B \cap \bar{S}) = 0,72 + 0,16 = 0,88.$$

Il faut donc calculer :

$$p_S(B) = \frac{p(S \cap B)}{p(S)}.$$

On a vu que $p(\bar{S}) = 0,88$, donc $p(S) = 1 - p(\bar{S}) = 0,12$.

$$\text{Donc } p_S(B) = \frac{0,2 \times 0,2}{0,12} = \frac{4}{12} \pm \frac{1}{3} \approx 0,33 \text{ au centième près.}$$

Partie B

3. On a vu que la probabilité de tirer une boîte de façon aléatoire dans le stock du grossiste sans trouver de pesticides est égale à 0,88. C'est une épreuve de Bernoulli. Répéter de façon indépendante 10 fois cette expérience est donc une épreuve de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,88$.

La variable X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,88)$.

2. Il faut trouver $p(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,88^{10} \times (1 - 0,88)^{10-10} = 0,88^{10} \approx 0,28$ au centième près.

3. Il faut trouver :

$$p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) = \binom{10}{8} \times 0,88^8 \times (1 - 0,88)^{10-8} + \binom{10}{9} \times 0,88^9 \times (1 - 0,88)^{10-9} + \binom{10}{10} \times 0,88^{10} \times (1 - 0,88)^{10-10} \approx 0,233043 + 0,379774 + 0,278501 \approx 0,891318 \approx 0,89 \text{ au centième près}$$

Partie C

1. On vérifie tout d'abord que :

- $n = 50$ et $50 \geq 30$;
- $np = 50 \times 0,88 = 44$ et $44 \geq 5$;
- $n(1 - p) = 50 \times 0,12 = 6$ et $6 \geq 5$.

On sait qu'alors l'intervalle de fluctuation asymptotique au semil de 95 % est égale à :

$$I_f = \left[0,88 - \frac{1,96 \times \sqrt{0,88 \times (1-0,88)}}{\sqrt{50}} ; 0,88 + \frac{1,96 \times \sqrt{0,88 \times (1-0,88)}}{\sqrt{50}} \right], \text{ d'où au cen-}$$

tième près :

$$I_f = [0,79 ; 0,98].$$

2. L'inspecteur de la brigade de répression constate une proportion de lots sans pesticides de $\frac{50-12}{50} \approx 0,76$.

Or $0,76 \notin I_f$, donc il doit constater au risque de 5 % que la publicité est mensongère.

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Voir la figure.

Partie B

1. a. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A est égal à $f'(a)$. Or $f'(x) = e^x$, donc $f'(a) = e^a$.
- b. De même le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point B est égal à $g'(b)$. Or $g'(x) = -(-e^{-x})$, donc $g'(b) = e^{-b}$.
- c. Si les deux tangentes sont égales le coefficient directeur de leurs équations réduites sont égaux, soit :
- $$f'(a) = g'(b) \iff e^a = e^{-b} \text{ et par croissance de la fonction logarithme népérien : } a = -b \iff b = -a.$$

2. Une équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A est égale à :

$$y - e^a = e^a(x - a) \iff y = xe^a + e^a(1 - a).$$

Une équation réduite de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point B est égale à :

$$y - (1 - e^{-b}) = e^{-b}(x - b) \iff y = xe^{-b} + 1 - e^{-b} - be^{-b}.$$

Ou en remplaçant $-b$ par a :

$$y = xe^a + 1 - e^a + ae^a \iff y = xe^a + 1 + e^a(a - 1).$$

Si les deux tangentes sont égales, leurs équations réduites sont les mêmes. On a déjà vu l'égalité des coefficients directeurs. Les ordonnées à l'origine sont aussi les mêmes soit :

$$e^a(1 - a) = 1 + e^a(a - 1) \iff e^a(2 - 2a) = 1 \iff 2(a - 1)e^x + 1 = 0.$$

Donc a est solution de l'équation dans \mathbb{R} :

$$2(x - 1)e^x + 1 = 0.$$

Partie C

1. a. Sur \mathbb{R} , $\varphi(x) = 2xe^x - e^x + 1$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, d'où par somme de limite :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 1.$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de φ .

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

- b. Somme de fonctions dérivable sur \mathbb{R} , φ est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\varphi'(x) = 2e^x + 2(x-1)e^x = 2xe^x.$$

Comme, quel que soit $x \in \mathbb{R}$; $e^x > 0$, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x . Donc sur $] -\infty ; 0[$, $\varphi'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle et sur $] 0 ; +\infty[$, $\varphi'(x) > 0$: la fonction φ est croissante sur cet intervalle. D'où le tableau de variations :

c.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	-1	$+\infty$

2. a. Sur $] -\infty ; 0]$ la fonction φ est continue et décroissante à valeurs dans $[-1 ; 1]$. Comme $0 \in [-1 ; 1]$ il existe un réel unique α de $] -\infty ; 0]$ tel que $f(\alpha) = 0$. Le même raisonnement sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ montre qu'il existe un réel unique de cet intervalle β tel que $f(\beta) = 0$.
Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans \mathbb{R} .
- b. La calculatrice donne successivement :
- $\varphi(-2) \approx 0,18$ et $\varphi(-1) \approx -0,47$, donc $-2 < \alpha < -1$;
 $\varphi(-1,7) \approx 0,013$ et $\varphi(-1,6) \approx -0,05$, donc $-1,7 < \alpha < -1,6$;
 $\varphi(-1,68) \approx 0,001$ et $\varphi(-1,67) \approx -0,005$, donc $-1,68 < \alpha < -1,67$;
 $\varphi(-1,679) \approx 0,00041$ et $\varphi(-1,678) \approx -0,0002$, donc $-1,679 < \alpha < -1,678$.
Conclusion au centième près $\alpha \approx -1,68$.
De la même façon on obtient $\beta \approx 0,77$.

Partie D

1. On sait que E appartient à la droite (EF) et à la courbe représentative \mathcal{C}_f . $E(\alpha ; e^\alpha)$ et $F(-\alpha ; 1 - e^{-\alpha})$.
L'équation de la tangente en E à la courbe \mathcal{C}_f est :
 $y - e^\alpha = e^\alpha(x - \alpha)$.
F appartient à cette tangente si et seulement si :
 $1 - e^{-\alpha} - e^\alpha = e^\alpha(-\alpha - \alpha) \iff 1 - 2e^{-\alpha} = -2e^\alpha \iff 2(\alpha - 1)e^\alpha + 1 = 0$ ce qui a été démontré à la question 2. b. de la partie C.
Conclusion : la droite (EF) est bien la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse α .
2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point d'abscisse $-\alpha$ est $e^{-(-\alpha)} = e^\alpha$.
On a vu dans la question précédente que la droite (EF) a pour coefficient directeur e^α et contient le point F.
Conclusion la droite (EF) est la tangente à la courbe \mathcal{C}_g au point d'abscisse $-\alpha$.

EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

1. **Affirmation 1** : VRAIE On a $\overrightarrow{AB}(-\sqrt{3}-2 ; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1 ; \sqrt{3}-2)$.
D'où $\overrightarrow{AC} = (2 - \sqrt{3})\overrightarrow{AB}$.
Les vecteurs sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

2. Affirmation 2 : FAUSSE On calcule successivement :

$$EB^2 = 8 ; EC^2 = 8 \text{ et } ED^2 = \frac{19}{4} + 2\sqrt{3} \neq 8.$$

Les points B, C et D ne sont pas équidistants de E.

3. Affirmation 3 : VRAIE Une équation du plan (IJK) est $x+y+z = 1$. Un point commun à ce plan et à la droite \mathcal{D} a ses coordonnées telles que :

$$2 - t + 6 - 2t - 2 + t = 1 \iff 5 = 2t \iff t = \frac{5}{2}.$$

Ce point commun existe donc et a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

4. Affirmation 4 : VRAIE (EFGH) est un carré donc le milieu T de [HF] est le milieu de [EG].

$$\text{On a donc } \vec{ET} = \frac{1}{2}\vec{EG}.$$

En prenant par exemple le repère $(A, \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$ calculons le produit scalaire :

$$\vec{AT} \cdot \vec{EC} = (\vec{AE} + \vec{ET}) \cdot (\vec{EG} + \vec{GC}) = \left(\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{EG}\right) \cdot (\vec{EG} + \vec{GC}) =$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{EG} + \vec{AE} \cdot \vec{GC} + \frac{1}{2}\vec{EG} \cdot \vec{EG} + \frac{1}{2}\vec{EG} \cdot \vec{GC}.$$

Or ABCDEFGH est un cube, donc $\vec{AE} \cdot \vec{EG} = 0$ et $\vec{EG} \cdot \vec{GC} = 0$.

De plus $\vec{AE} = -\vec{GC}$ et $EG = c\sqrt{2}$, c étant la mesure du côté du cube.

$$\text{Finalement : } \vec{AT} \cdot \vec{EC} = -c^2 + \frac{1}{2}(c\sqrt{2})^2 = -c^2 + c^2 = 0.$$

Les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. *Initialisation* : la relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité : supposons qu'il existe un naturel p tel que $u_p > 1$.

$$\frac{1+3u_p}{3+u_p} = \frac{3+u_p-2+2u_p}{3+u_p} = \frac{(3+u_p)+(2u_p-2)}{3+u_p} = 1 + 2\frac{u_p-1}{3+u_p}.$$

Par hypothèse de récurrence on a :

$u_p - 1$ et comme $u_p > 1$, $3 + u_p > 4 > 0$ donc son inverse $\frac{1}{3+u_p} > 0$ et finalement

$$\frac{u_p-1}{3+u_p} > 0, \text{ c'est-à-dire que } u_{p+1} = \frac{1+3u_p}{3+u_p} > 1$$

Conclusion : on a démontré par récurrence que quel que soit le naturel n , $u_n > 1$.

2. a. Quel que soit le naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \frac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} =$

$$\frac{1-u_n^2}{3+u_n} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}.$$

b. On sait que quel que soit le naturel n , $u_n > 1 \Rightarrow u_n^2 > 1^2 \Rightarrow 1 - u_n^2 < 0$ et comme $3 + u_n > 0$ et finalement $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge vers une limite supérieure ou égale à 1.

Partie B

1.	i	1	2	3
	u	0,800	1,077	0,976

2. Il semble que la suite converge vers 1 par valeurs alternativement supérieures et inférieures.

$$3. \text{ a. } V_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - 1}{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} + 1} = \frac{0,5 - 0,5u_n}{1,5 + 1,5u_n} = \frac{-0,5(u_n - 1)}{1,5(u_n + 1)} = -\frac{1}{3}v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

$$\text{b. On a } v_0 = \frac{2-1}{2+3} = \frac{1}{3}.$$

On sait qu'alors pour tout naturel n , $v_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

4. a. Quel que soit le naturel n , $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \leq 1$, donc $v_n \leq \frac{1}{3}$ et par conséquent $v_n \neq 1$.

$$\text{b. } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \iff v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \iff v_n u_n + v_n = u_n - 1 \iff v_n u_n - u_n + = -1 - v_n \iff u_n(v_n - 1) = -1 - v_n \text{ et comme } v_n \neq 1,$$

$$u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1} v_n - 1 = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}.$$

c. Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, donc

d'après le résultat précédent $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. a. On a :

$$\begin{cases} x_{E'} = \frac{5}{4} \times 2 + \frac{3}{4} \times 2 \\ y_{E'} = \frac{5}{4} \times 2 + \frac{5}{4} \times 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{E'} = 4 \\ y_{E'} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{F'} = \frac{5}{4} \times (-1) + \frac{3}{4} \times 5 \\ y_{F'} = \frac{5}{4} \times (-1) + \frac{5}{4} \times 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{F'} = \frac{5}{2} \\ y_{F'} = \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{G'} = \frac{5}{4} \times (-3) + \frac{3}{4} \times 3 \\ y_{G'} = \frac{5}{4} \times (-3) + \frac{5}{4} \times 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{G'} = -\frac{3}{2} \\ y_{G'} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

b. $OE^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, donc $OE = 2\sqrt{2}$.

$$OE'^2 = 4^2 + 4^2 = 32, \text{ donc } OE' = 4\sqrt{2}. \text{ Donc } OE' = 2OE.$$

$$OG^2 = (-3)^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18, \text{ donc } OG = 3\sqrt{2};$$

$$OG'^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{18}{4}, \text{ donc } OG' = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \text{ Donc } OG' = \frac{1}{2}OG.$$

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Partie B

- Il suffit d'écrire avant le FIN POUR : afficher x , afficher y
- Il semble que les coordonnées sont de plus en plus grandes tout en se rapprochant (les points images sont de plus en plus proches de la droite $y = x$.)

Partie C

1. *Initialisation* : pour $n = 1$, on a bien $A^1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ et :

$$\alpha_1 = 2^0 + \frac{1}{2^2} \text{ et } \beta_1 = 2^0 - \frac{1}{2^2}.$$

Hérédité : supposons qu'il existe un naturel p tel que : $A^p = \begin{pmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ \beta_p & \alpha_p \end{pmatrix}$ et

$$\alpha_p = 2^{p-1} + \frac{1}{2^{p+1}} \text{ et } \beta_p = 2^{p-1} - \frac{1}{2^{p+1}}.$$

La relation $A^{p+1} = A \times A^p$ entraîne que :

$$\alpha_{p+1} = \frac{5}{4}\alpha_p + \frac{3}{4}\beta_p \text{ et}$$

$$\beta_{p+1} = \frac{3}{4}\alpha_p + \frac{5}{4}\beta_p, \text{ soit en utilisant la relation de récurrence :}$$

$$\alpha_{p+1} = \frac{5}{4}\left(2^{p-1} + \frac{1}{2^{p+1}}\right) + \frac{3}{4}\left(2^{p-1} - \frac{1}{2^{p+1}}\right) = \frac{8}{4}2^{p-1} + \frac{2}{4}\frac{1}{2^{p+1}} = 2^p + \frac{1}{2^{p+2}}.$$

De même :

$$\beta_{p+1} = \frac{3}{4}\left(2^{p-1} + \frac{1}{2^{p+1}}\right) + \frac{5}{4}\left(2^{p-1} - \frac{1}{2^{p+1}}\right) = \frac{8}{4}2^{p-1} - \frac{2}{4}\frac{1}{2^{p+1}} = 2^p - \frac{1}{2^{p+2}}.$$

Donc les relations sont vraies au rang $p + 1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. a. L'égalité

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

se traduit par :

$$\begin{cases} x_n = 2\alpha_n + 2\beta_n \\ y_n = 2\beta_n + 2\alpha_n \end{cases}$$

On a quel que soit le naturel n , $x_n = y_n$.

b. $OE_n^2 = x_n^2 + y_n^2 = 2x_n^2$;

Avec $x_n = 2\alpha_n + 2\beta_n = 2(\alpha_n + \beta_n)$ et $\alpha_n + \beta_n = 2^n$, on obtient

$$OE_n^2 = 2 \times 4 (2^n)^2 = 2^{2n+3}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{2n+3} = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} OE_n = +\infty$.

Annexe

à rendre avec la copie

Exercice 2

