EXERCICES SUR LES MOYENNES

(Niveau 4e)

Définitions :

Soit a et b deux nombres strictement positifs. Une <u>*moyenne*</u> de a et b est un nombre m, calculé à partir de a et de b, qui donnera le même résultat par une opération donnée (comme l'addition, la multiplication, l'élévation au carré ou l'inversion), que l'on utilise a et b, ou bien m et m.

Ainsi, voici quatre exemples de moyennes :

- $x = \dfrac{a+b}{2}$ est la <u>*moyenne arithmétique*</u> de a et de b (x vérifie $x + x = a + b$)
- $g = \sqrt{ab}$ est leur <u>*moyenne géométrique*</u> (g vérifie $g \times g = a \times b$)
- $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ est leur <u>*moyenne quadratique*</u> (q vérifie $q^2 + q^2 = a^2 + b^2$)
- $h = \dfrac{2ab}{a+b}$ est leur <u>*moyenne harmonique*</u> (h vérifie $\dfrac{1}{h}+\dfrac{1}{h}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$).

Exercices d'utilisation :

Résoudre les quatre exercices suivants, en précisant dans chaque cas quel type de moyenne on utilise.

a) Dans un certain pays, au mois de janvier d'une certaine année, les prix ont augmenté de 0,9 %, puis en février de 1,2 %. Déterminer l'augmentation mensuelle constante qu'il y aurait dû avoir pendant les deux mois pour obtenir le même résultat à l'issue des deux mois.

b) Un automobiliste roule pendant une heure à la vitesse constante de 90 km/h, puis pendant encore une heure à la vitesse constante de 120 km/h. Déterminer à quelle vitesse constante il aurait dû rouler pendant la durée totale du trajet pour effectuer le même nombre de kilomètres.

c) Un automobiliste roule 100 km à la vitesse constante de 90 km/h, puis encore 100 km à la vitesse constante de 120 km/h. Déterminer à quelle vitesse constante il aurait dû rouler sur la distance totale pour que la durée du voyage soit identique.

d) On considère deux disques de rayons respectifs 9 cm et 12 cm. On calcule la somme des aires de ces disques. Déterminer par quel rayon (identique pour les deux) il faut remplacer les deux rayons pour obtenir la même somme.

Comparaisons :

En fait, ces quatre moyennes, appliquées aux mêmes nombres a et b, sont toujours dans le même ordre, c'est-à-dire que l'une des quatre est toujours la plus grande, puis une est toujours en deuxième position…

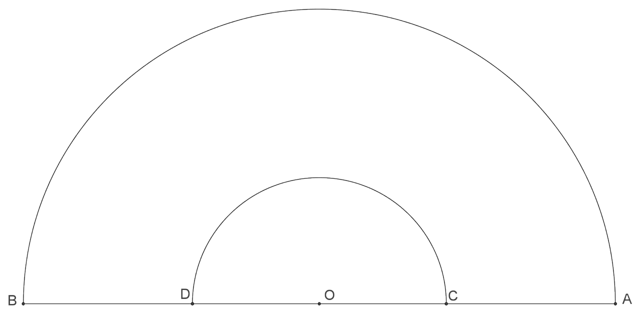
On va le montrer de deux manières :

Comparaisons géométriques :

Il s'agit ici de construire géométriquement ces quatre moyennes et montrer dans quel ordre elles sont.

- Dans le demi-plan « supérieur », c'est-à-dire celui constitué des points d'ordonnées positives, on trace deux demi-cercles de même centre O, origine du repère, tels que celui, noté (Γ), de plus grand rayon coupe l'axe des abscisses en A et en B (A a la plus grande abscisse) et l'autre, noté (Γ') en C et en D (C a la plus grande abscisse).
- On suppose que (Γ') est de rayon non nul et on pose alors $AD = a$ et $DB = b$. On a donc $a > b$.
- La perpendiculaire à (AB) passant par D coupe (Γ) en E.
- Le point F est le projeté orthogonal de D sur (OE) et G est le point d'intersection de (Γ') avec la perpendiculaire à (OE) passant par O.

a) Compléter le dessin ci-dessous (ici $a = 6$ et $b = 2$).



b) Calculer, dans le cas général, en fonction de a et de b, les longueurs OA, OC, DE, DF, EF et EG.

c) Montrer que les quatre moyennes citées plus haut apparaissent dans ce dessin comme les longueurs de certains segments.

d) Expliquer alors pourquoi ces quatre moyennes peuvent êtres toujours mises dans un certain ordre.

Comparaisons algébriques :

- Calculer, dans le cas général, en fonction de a et de b, les trois différences $q - x$, $x - g$ et $g - h$ et montrer qu'elles sont toujours positives ou nulles.
- Conclure.

Question supplémentaire :

- Montrer que l'une de ces quatre moyennes est elle-même la moyenne (préciser laquelle) de deux de ces moyennes.

Correction des exercices d'utilisation :

a) Notons P un prix, en janvier. Au 1er février, le prix est devenu $P' = P + \frac{0,9}{100} \times P = P \times 1,009$. Au 1er mars, le prix P' est devenu $P'' = P' \times 1,012$. Donc $P'' = P \times 1,009 \times 1,012$.

Notons t le pourcentage d'augmentation constant sur les deux mois. On doit avoir : $P' = P \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ et $P'' = P' \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$, donc $P'' = P \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2$. Le nombre t vérifie donc l'équation $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 = 1,009 \times 1,012$. Le nombre $1 + \frac{t}{100}$ est donc la ***moyenne géométrique*** de 1,009 et de 1,012. On a donc $1 + \frac{t}{100} = \sqrt{1,009 \times 1,012}$ (car tout est positif).

Or $\sqrt{1,009 \times 1,012} = \sqrt{1,021108} \approx 1,010498...$

Donc l'augmentation moyenne sur les deux mois est d'environ 1,0499 %.

On remarquera que la valeur est très proche de la moyenne arithmétique $\frac{0,9+1,2}{2} = 1,05$, mais elle n'est pas égale !

b) On utilise la formule $d = v \times t$, dans laquelle d est la distance parcourue, v la vitesse et t le temps (la durée).

La première partie du voyage dure 1 heure à la vitesse de 90 km/h, donc l'automobiliste roule 90 km. Et de même il roule 120 km pendant la deuxième partie. La vitesse moyenne v vérifie donc l'équation :

$90 + 120 = v \times (1+1)$, donc $v = \frac{90+120}{2} = 105$ km/h. Il s'agit de la ***moyenne arithmétique*** de 90 et de 120.

c) On utilise encore la formule $d = v \times t$. La première partie du voyage est de 100 km à 90 km/h, donc la durée est de $\frac{100}{90}$ heures. Et de même la durée est $\frac{100}{120}$ heures pendant la deuxième partie.

La vitesse moyenne v vérifie donc l'équation :

$100 + 100 = v \times \left(\frac{100}{90} + \frac{100}{120}\right)$, donc

$\frac{100+100}{v} = \frac{100}{90} + \frac{100}{120}$.

Il s'agit de la ***moyenne harmonique*** de 90 et de 120.

On a donc $\frac{2}{v} = \frac{1}{90} + \frac{1}{120} = \frac{210}{90 \times 120}$, donc

$\frac{v}{2} = \frac{1}{90} + \frac{1}{120} = \frac{90 \times 120}{210}$, donc

$v = \frac{2 \times 90 \times 120}{210} = \frac{720}{7} \approx 102,9$ km/h.

d) La somme des aires est donc $\pi \times 9^2 + \pi \times 12^2 = \pi\left(9^2 + 12^2\right)$. On cherche le rayon R tel que $\pi\left(9^2 + 12^2\right) = \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R^2$, donc $9^2 + 12^2 = 2R^2$, donc $R^2 = \frac{9^2 + 12^2}{2}$. Le nombre R est donc la ***moyenne quadratique*** de 9 et de 12. Comme R est positif, on a : $R = \sqrt{\frac{9^2+12^2}{2}} = \sqrt{112,5} \approx 10,6$.

Correction des comparaisons géométriques :

- <u>*Calcul de OA*</u> : On a, par symétrie, $AC = BD$ et $OC = OD$. On a aussi $AB = a + b$ et $BO + OA = BA$ donc $OA = \frac{a+b}{2}$.
- <u>*Calcul de OC*</u> : De plus, $a = DO + OC + CA$, donc $a = 2OC + b$, donc $OC = OD = \frac{a-b}{2}$.
- <u>*Calcul de DE*</u> : E est sur le cercle (C) donc $OE = OA = \frac{a+b}{2}$. Le triangle (ODE) étant rectangle en D, on a, grâce au théorème de Pythagore, $OE^2 = OD^2 + DE^2$, donc $DE^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, donc $DE^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - \left(a^2 - 2ab + b^2\right)}{4} = ab$. Donc, comme c'est une longueur, $DE = \sqrt{ab}$.
- <u>*Calcul de DF*</u> : On peut calculer l'aire du triangle (ODE) de deux façons : $\frac{1}{2} DE \times OD$ et $\frac{1}{2} OE \times DF$. Donc $DE \times OD = DF \times OE$, donc $DF = \frac{DE \times OD}{OE} = \sqrt{ab}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$ [simplification par 2 aux numérateur et dénominateur].
- <u>*Calcul de EF*</u> : Dans le triangle (DEF), rectangle en F, on a (d'après le théorème de Pythagore) : $DE^2 = DF^2 + EF^2$, donc

$EF^2 = DE^2 - DF^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2 - \left(\sqrt{ab}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\right)^2$, donc

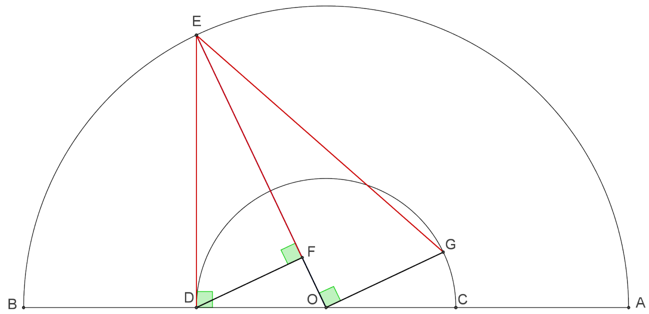
$EF^2 = ab - ab\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{ab\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right)}{(a+b)^2} = \frac{4(ab)^2}{(a+b)^2}$

, donc enfin $EF = \frac{2ab}{a+b}$.

- *Calcul de EG* : Dans le triangle rectangle (*OEG*), on a : $EG^2 = OE^2 + OG^2$. Or *G* est sur (*C'*), donc $OG = OC = \dfrac{a-b}{2}$.
- Donc $EG^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 =$ $\dfrac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{4}$

  $EG^2 = \dfrac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{4} = \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

  Donc, comme $EG > 0$, $EG = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.



c) La moyenne arithmétique est donc *OE* (ainsi que *OA* et *OB*), la moyenne géométrique est *DE*, la moyenne harmonique est *EF* et enfin la moyenne quadratique est *EG*.

d) Dans le triangle (*DEF*), [*EF*] est un côté de l'angle droit et [*DE*] l'hypoténuse, donc $EF < DE$.

Dans le triangle (*ODE*), [*DE*] est un côté de l'angle droit et [*OE*] l'hypoténuse, donc $DE < OE$.

Dans le triangle (*OEG*), [*OE*] est un côté de l'angle droit et [*EG*] l'hypoténuse, donc $OE < EG$.

Donc on a toujours : $EF < DE < OE < EG$, d'où :

« *harmonique* » < « *géométrique* » < « *arithmétique* » < « *quadratique* »

Correction des comparaisons algébriques *(démonstrations à finir soi-même)* **:**

$$q - x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} = \ldots = \frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} + a + b\right)} \geq 0,$$

$$x - g = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \ldots = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0 \text{ et}$$

$$g - h = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \ldots = \frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{a+b} \geq 0.$$

Donc $q \leq x \leq g \leq h$.

Question supplémentaire :

On remarquera que $x \times h = \dfrac{a+b}{2} \times \dfrac{2ab}{a+b} = ab = g^2$.

Donc $g = \sqrt{x \times h}$. La moyenne géométrique de *a* et de *b* est donc aussi la moyenne géométrique des moyennes arithmétique et harmonique de *a* et de *b*.